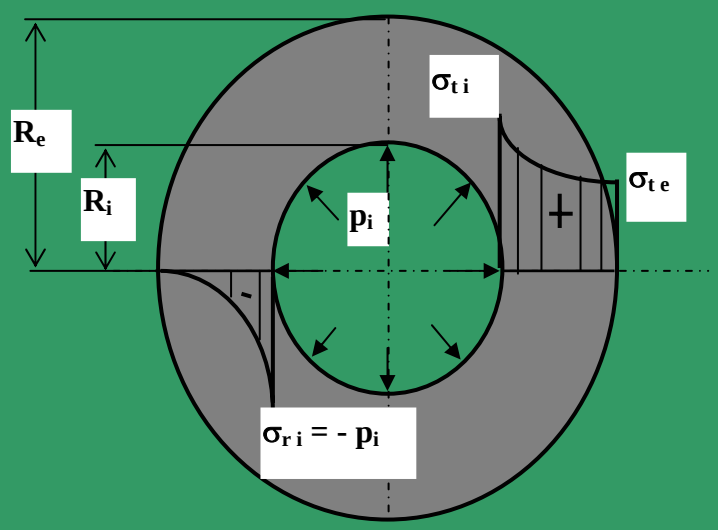
PAVEL TRIPA

REZISTENȚA MATERIALELOR

Solicitări compuse, deformații, stabilitate, şoc, oboseală, vase de rotație, tuburi cu pereți groşi, solicitări peste limita de elasticitate

MONOGRAFII REZMAT



Editura MIRTON
Timişoara, 2001

Referenți ştiințifici:

Prof. univ. dr. ing. Eur. Ing. **Tiberiu BABEU**
Membru al Academiei de Ştiințe Tehnice din România
Prof. univ. dr. ing. **Constantin CRISTUINEA**

Tehnoredactare computerizată:
Prof. univ. dr. ing. **Pavel TRIPA**

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale
TRIPA, PAVEL
Rezistența materialelor / Pavel Tripa – Timişoara
Mirton, 1999-2001
2 vol; 24 cm.
ISBN 973-578-915-9
Vol. 2. – 2001 – 276 p. – Bibliogr. – ISBN 973-585-342-6

539.4

C U P R I N S

Prefață ….....……... 6

1. SOLICITĂRI COMPUSE ……... 8

1.1 Considerații generale ……... 8

1.2 Tracțiunea – compresiunea excentrică …… 9

1.3 Sâmburele central …… 14

1.3.1 Sâmburele central pentru suprafața dreptunghiulară …… 15

1.3.2 Sâmburele central pentru suprafața circulară ……. 16

1.3.3 Sâmburele central pentru suprafața **I** simetrică …….. 18

1.3.4 Tensiuni normale extreme în secțiune, exprimate funcție de limitele limitele sâmburelui central ……. 19

1.4 Teorii de rezistență. Încovoiere cu torsiune …… 21

1.4.1 Teorii de rezistență ……. 21

1.4.2 Încovoierea cu torsiune …….. 24

1.5 Aplicații ……... 27

2. METODE PENTRU CALCULUL DEPLASĂRILOR …….. 42

2.1 Considerații generale ……... 42

2.2 Metode clasice pentru calculul deplasărilor barelor drepte solicitate la încovoiere …… 43

2.2.1 Metoda dublei integrări …… 43

2.2.2 Metoda parametrilor inițiali ……. 47

2.2.3 Metoda grinzii conjugate ……. 52

2.3 Metoda sarcinii unitare …… 60

2.3.1 Procedeul Mohr – Maxwell …….. 61

2.3.2 Regula de integrare Veresceaghin …… 66

2.4 Sisteme static nedeterminate ……... 70

2.5 Aplicații ……... 74

3. STABILITATEA ECHILIBRULUI ELASTIC. FLAMBAJUL ……... 84

3.1 Considerații generale ……... 84

3.2 Calculul forței critice de flambaj la barele drepte zvelte solicitate la compresiune axială …….. 85

3.2.1 Bara articulată la ambele capete ……... 85

3.2.2 Bara înțepenită la un capăt şi liberă la celălalt ……. 87

3.2.3 Bara articulată la un capăt şi înțepenită la celălalt ……... 88

3.2.4 Bara înțepenită la ambele capete …….. 91

3.3 Limitele de valabilitate ale formulei lui Euler. Flambajul elastic şi plastic …… 95

3.3.1 Flambajul elastic …….. 95

3.3.2 Flambajul plastic. Relațiile Tetmajer – Iasinski ……... 96

3.4 Calculul la flambaj …….. 98

3.4.1 Calculul în domeniul elastic şi plastic …….. 98

3.4.2 Calculul la flambaj prin metoda coeficientului de flambaj φ ……... 100

3.5 Flambajul barelor sub acțiunea forțelor excentrice ……. 101

3.6 Flambajul lateral al grinzilor subțiri solicitate la încovoiere ……... 104

3.7 Aplicații ……... 108

4. SOLICITĂRI DINAMICE …….. 112

4.1 Considerații generale ……... 112
4.2 Solicitări prin forțe de inerție …….. 112
4.2.1 Calculul cablului de ascensor sau de macara ……... 114
4.2.2 Calculul volantului în mişcarea de rotație …… 115
4.2.3 Calculul barei în mişcarea de rotație în jurul unei axe perpendiculare pe planul său ……. 118
4.2.4 Calculul bielei motoare …… 121
4.3 Solicitări produse de variații rapide ale accelerației …… 123
4.3.1 Considerații generale …… 123
4.3.2 Întinderea (compresiunea) prin şoc …….. 124
4.3.3 Încovoierea prin şoc ……. 127
4.3.4 Torsiunea prin şoc …… 129
4.3.5 Calculul arcului elicoidal cu spire strânse solicitat la şoc …… 131
4.3.6 Efectul masei corpului lovit asupra solicitării prin şoc …… 133
4.4 Aplicații ……... 136

5. SOLICITĂRI VARIABILE …… 144

5.1 Cicluri ale solicitărilor variabile …….. 144
5.2 Oboseala materialelor …….. 147
5.3 Rezistența la oboseală. Curba lui W★hler …….... 147
5.4 Diagramele rezistențelor la oboseală …….. 150
5.5 Schematizarea diagramelor rezistențelor la oboseală ……. 152
5.5.1 Schematizări ale diagramei Haigh …… 153
5.5.2 Schematizarea diagramei Smith ……... 154
5.6 Factorii care influențează rezistența la oboseală ……. 155
5.7 Calculul la oboseală. Calculul coeficientului de siguranță ……. 158
5.7.1 Calculul coeficientului de siguranță, schematizarea Soderberg, criteriul R = const. …… 161
5.7.2 Calculul coeficientului de siguranță, schematizarea Serensen, criteriul R = const. …… 162
5.7.3 Calculul coeficientului de siguranță la solicitări variabile compuse … 164
5.8 Calculul la durabilitate limitată ……... 166
5.9 Aplicați …… 168

6. CALCUL PLĂCILOR PLANE IZOTROPE …….. 172

6.1 Considerații generale ……... 172
6.2 Calculul la încovoiere al plăcilor circulare încărcate simetric …… 173
6.2.1 Relații între tensiuni şi deformații specifice ……. 173
6.2.2 Echilibrul elementului de placă …… 176
6.2.3 Calculul plăcii circulare încărcată cu o sarcină uniform distribuită şi încastrată pe contur …….. 183
6.2.4 Calculul plăcii circulare încărcată cu o sarcină uniform distribuită şi simplu rezemată pe contur …… 187
6.2.5 Calculul plăcii circulare încărcată cu o forță concentrată în centru şi

înțepenită pe contur …….. 191
6.3 Calculul la încovoiere al plăcilor dreptunghiulare …….. 194
6.4 Calculul la şoc al plăcilor plane …….. 196
6.5 Calculul aproximativ al plăcilor plane …… 197
6.5.1 Calculul aproximativ al plăcii circulare simplu rezemată pe contur şi încărcată cu o sarcină uniform distribuită pe o suprafață circulară în jurul centrului plăcii …… 198
6.5.2 Calculul aproximativ al plăcii dreptunghiulare simplu rezemată pe contur …… 200

7. VASE DE REVOLUȚIE CU PEREȚI SUBȚIRI ……. 202

7.1 Considerații generale ……... 202
7.2 Calculul vaselor de revoluție cu pereți subțiri ……. 203

8. TUBURI CU PEREȚI GROŞI …….. 210

8.1 Considerații generale ……... 210
8.2 Tubul cilindric cu perete gros supus la presiune interioară şi exterioară …… 210
8.2.1 Tubul cilindric supus numai la presiune interioară …….. 215
8.2.2 Tubul cilindric supus numai la presiune exterioară ……. 217
8.3 Tuburi cilindrice fretate …….. 219
8.4 Tensiuni termice în tubul cu perete gros ……. 223
8.5 Vase sferice cu pereți groşi ……. 228

9. SOLICITĂRI PESTE LIMITA DE ELASTICITATE ……. 234

9.1 Considerații generale ……... 234
9.2 Schematizarea diagramelor caracteristice ……... 238
9.3 Calculul în domeniul elasto – plastic …….. 242
9.4 Criterii de plasticitate …….. 248
9.5 Solicitări simple în domeniul elasto – plastic …….. 250
9.5.1 Tracțiunea sau compresiunea în domeniul elasto – plastic …….. 250
9.5.2 Încovoierea barelor drepte în domeniul elasto – plastic …….. 251
9.5.3 Tensiuni şi deformații remanente la încovoiere în domeniul elasto – plastic ……... 257
9.5.4 Torsiunea barelor drepte circulare în domeniul elasto – plastic ……... 259
9.5.5 Tensiuni remanente în cazul răsucirii barei drepte circulare în domeniul elasto – plastic …….. 261
9.5.6 Răsucirea simplă a unei bare drepte de secțiune transversală oarecare în domeniul elasto – plastic …….. 262
9.6 Tubul cu perete gros supus la presiune interioară, în domeniul elasto – plastic . 265
9.7 Cedarea sistemelor alcătuite din bare drepte, solicitate la încovoiere ……. 269

BIBLIOGRAFIE ……... 274

Prefață

Prezenta lucrare constituie, de fapt, volumul II, din Rezistența Materialelor, primul volum apărând în anul 1999 la Editura “MIRTON” din Timişoara, prin contribuția aceluiaşi autor.

Primul volum de Rezistența Materialelor se întinde pe parcursul a nouă capitole: Noțiuni introductive (Cap. 1), Forțe interioare. Diagrame de eforturi (Cap. 2), Caracteristici geometrice ale suprafețelor plane (Cap.3), Caracteristici mecanice ale metalelor (Cap.4), Tracțiunea şi compresiunea barelor drepte (Cap.5), Forfecarea pieselor de grosime mică (Cap. 6), Încovoierea barelor plane (Cap. 7), Torsiunea barelor drepte (Cap. 8), Noțiuni de teoria elasticității (Cap. 9).

Acest volum este structurat tot pe nouă capitole: Solicitări compuse (Cap. 1), Metode pentru calculul deplasărilor (Cap. 2), Stabilitatea echilibrului elastic. Flambajul (Cap. 3), Solicitări dinamice (Cap. 4), Solicitări variabile (Cap. 5), Calculul plăcilor plane izotrope (Cap. 6), Vase de revoluție cu pereți subțiri (Cap.7), Tuburi cu pereți groşi (Cap. 8), Solicitări peste limita de elasticitate (Cap. 9).

Prin apariția acestei lucrări, autorul a reuşit să finalizeze o lucrare, de mare utilitate şi necesitate, în două volume în care sunt tratate toate noțiunile de bază necesare a fi însuşite de către viitorii ingineri mecanici. Din acest punct de vedere, cele două volume de Rezistența Materialelor, se adresează în primul rând studenților de la facultățile de inginerie mecanică. Ele pot fi însă consultate şi de către studenții altor facultăți care studiază disciplina de Rezistența Materialelor, de către inginerii din producție, proiectare sau cercetare.

Lucrarea dacă nu umple un gol, cel puțin întregeşte numărul lucrărilor de Rezistența Materialelor, scoase în decursul anilor de către cadrele didactice de la Catedra de Rezistența Materialelor de la Facultatea de Mecanică din Timişoara.

În vederea elaborării lucrării de Rezistența Materialelor, autorul s-a bazat pe experiența sa proprie din activitatea didactică desfăşurată cu studenții, precum şi pe cele mai reprezentative lucrări din domeniu, apărute în țară la diferite edituri.

Noțiunile teoretice sunt prezentate simplu, în logica lor firească, făcând astfel lucrarea accesibilă unui număr mare de persoane şi cu un nivel de pregătire nu prea ridicat.

Aproape toate capitolele lucrării se finalizează cu prezentarea unor aplicații model, astfel încât cei care o parcurg pot să-şi verifice nivelul cunoştințelor însuşite în urma parcurgerii atente a lucrării. În aceste aplicații, accentul nu s-a pus pe efectuarea calculelor numerice, ci pe însuşirea modului de abordare a problemei şi a parcurgerii etapelor de rezolvare în ordinea lor firească.

Autorul este conştient de faptul că lucrarea poate fi îmbunătățită atât sub aspectul conținutului cât şi al prezentării grafice, motiv pentru care îşi exprimă mulțumirea față de toți cei care vor veni cu sugestii şi aprecieri critice, în vederea ridicarii nivelului lucrării sub toate aspectele sale într-o nouă ediție.

Autorul

1. SOLICITĂRI COMPUSE

1.1 CONSIDERAȚII GENERALE

Dacă în secțiunea transversală a unui element de rezistență acționează un singur efort, atunci în acea secțiune se realizează o solicitare simplă (axială, forfecare, încovoiere, torsiune). Deoarece, în cele mai multe cazuri forța tăietoare se neglijează, se poate considera că încovoierea cu forță tăietoare (încovoierea simplă) este o solicitare simplă.

Dacă însă în secțiunea transversală a elementului de rezistență acționează două sau mai multe eforturi, în acea secțiune se realizează o *solicitare compusă*. Solicitarea compusă apare din acțiunea simultană a mai multor componente ale eforturilor din secțiunea transversală în diferite combinații (două, trei, patru, cinci sau chiar şase componente). În Fig.1.1-1 se prezintă starea generală de solicitare compusă, când în secțiunea transversală acționează toate componentele eforturilor.

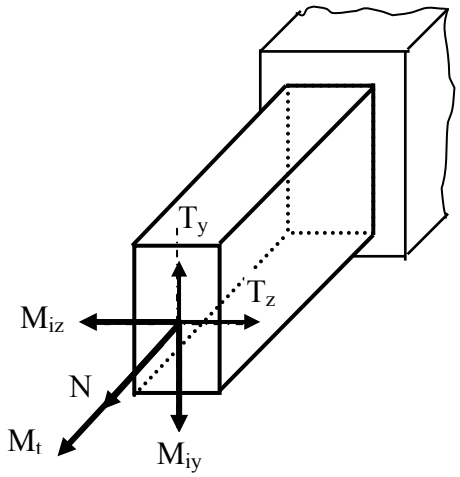


Fig.1.1-1

După cum se constată, unele eforturi la solicitarea compusă produc tensiuni normale σ (N, M_{iz}, M_{iy}) iar altele (T_z, T_y, M_{tt}) tensiuni tangențiale τ.

Dacă în secțiunea transversală acționează eforturi care produc numai tensiuni de acelaşi fel, solicitarea compusă este de *categoria I*, iar dacă produc tensiuni normale şi tangențiale, solicitarea este compusă de *categoria a II-a*. În cele de categoria I, se încadrează solicitarea axială cu cea de încovoiere sau de

forfecare cu cea de torsiune. În categoria a II-a, cea mai răspândită este încovoierea simplă cu torsiunea.

Calculul de rezistență la solicitarea compusă, impune calculul tensiunilor cele mai mari din secțiunea transversală, care se determină cu relațiile de calcul ale solicitărilor simple.

În cazul general de solicitare compusă, pentru bara dreaptă, starea de tensiune într-un punct al acesteia poate fi considerată ca o stare plană. În acest caz, calculul de rezistență se efectuează după teoriile stărilor de tensiune limită. De asemenea pentru solicitarea compusă de categoria I, încovoiere oblică sau tracțiune (compresiune) cu încovoiere, starea de tensiune poate fi considerată liniară dacă se neglijează forța tăietoare, care eventual ar putea exista. Aici, criteriul stării limită utilizat este cel de la solicitarea de întindere sau compresiune simplă. În cazurile ce se vor prezenta în continuare, se va considera valabil *principiul independenței acțiunii forțelor*, ceea ce înseamnă că tensiunile şi deformațiile la solicitarea compusă de categoria I, se vor determina prin însumarea geometrică a tensiunilor şi deformațiilor produse de fiecare efort existent în secțiunea respectivă. Acest mod de calcul simplificat, poate fi acceptat numai pentru barele rigide, la care deformațiile mici produse de încărcări nu modifică semnificativ forma inițială a barelor.

Încovoierea oblică care este un caz simplu de solicitare compusă de categoria I, a fost prezentat în volumul anterior al lucrării Rezistența Materialelor, motiv pentru care nu se mai prezintă în acest volum. De altfel, studiul încovoierii oblice este un caz particular al celui care se prezintă în continuare.

1.2 TRACȚIUNEA-COMPRESIUNEA EXCENTRICĂ

Se consideră o bară dreaptă solicitată de o forță F normală la planul secțiunii transversale a cărei direcție nu coincide cu axa longitudinală a barei (Fig.1.2-1a).

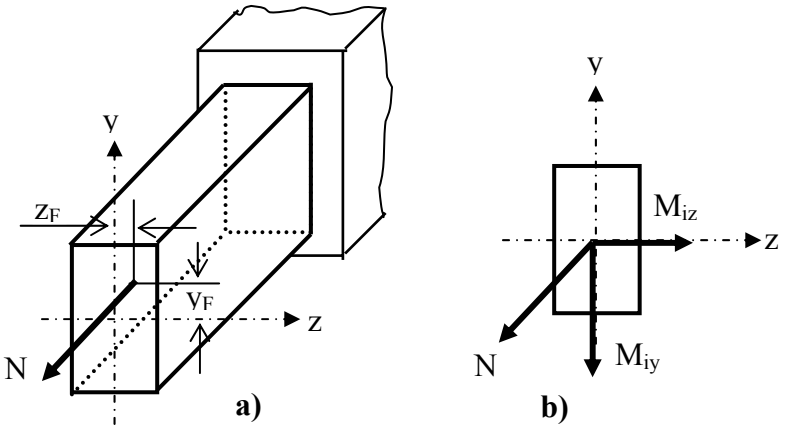


Fig.1.2-1

Față de centrul de greutate al secțiunii transversale, punctul de aplicație al forței excentrice F, are coordonatele (z_F , y_F). Reducând forța excentrică F în centrul de greutate al secțiunii transversale în care ea acționează, se obține torsorul format dintr-o forță axială ($N = F$) şi două cupluri (M_{iz} , M_{iy}). Torsorul forțelor este prezentat în Fig.1.2-1a. Valoarea acestora este:

$$N = F$$
$$M_{iz} = F \cdot y_F \qquad 1.2\text{-}1$$
$$M_{iy} = F \cdot z_F$$

Diagramele de eforturi în lungul barei pentru această situație, sunt prezentate în Fig.1.2-2a,b.

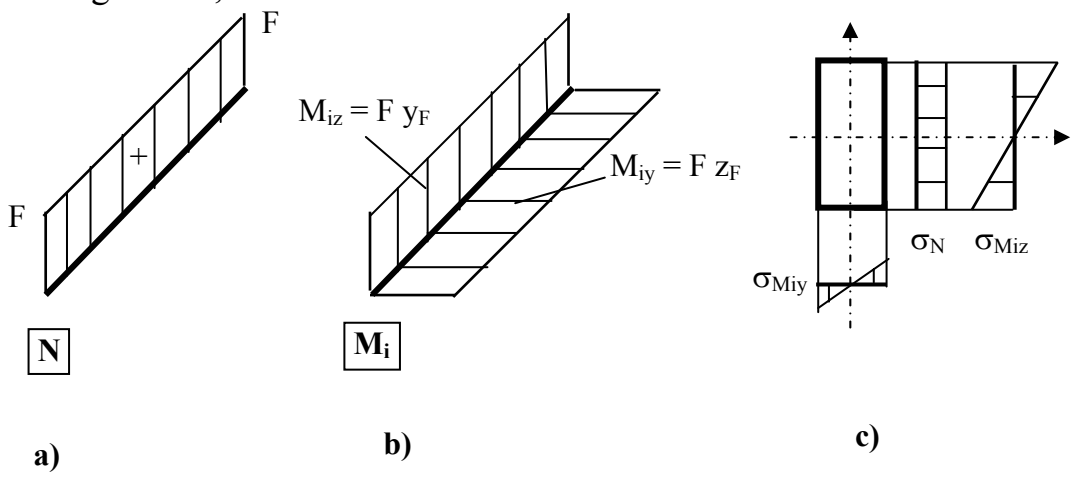


Fig.1.2-2

Cum bara are secțiunea constantă, iar eforturile au aceeaşi valoare în oricare secțiune, rezultă că secțiunea periculoasă poate fi oricare. Calculul de rezistență se efectuează în această secțiune. Deci eforturile din secțiunea periculoasă sunt:

$$N = F$$
$$M_{iz} = F \cdot y_F \qquad 1.2\text{-}2$$
$$M_{iz} = F \cdot z_F$$

Fiecare efort produce în secțiunea transversală a barei tensiuni normale σ, rezultând astfel o solicitare compusă de categoria I. Pentru cele trei eforturi tensiunile se calculează cu relațiile cunoscute de la solicitările simple:

$$\sigma_N = \frac{N}{A} = \frac{F}{A} \qquad 1.2\text{-}3a$$

$$\sigma_{Miz} = \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y = \frac{F \cdot y_F}{I_z} \cdot y \qquad 1.2\text{-}3b$$

$$\sigma_{Miy} = \frac{M_{iy}}{I_y} \cdot z = \frac{F \cdot z_F}{I_y} \cdot z \qquad 1.2\text{-}3c$$

Variația tensiunilor normale produse de cele trei eforturi sunt prezentate în Fig.1.2-2c. Fiind tensiuni de acelaşi fel şi având aceeaşi direcție (normală la secțiunea transversală), tensiunea rezultantă într-un punct al secțiunii transversale, se obține prin însumarea algebrică a tensiunii normale produsă de fiecare efort:

$$\sigma_{rez} = \sigma_N + \sigma_{Miz} + \sigma_{Miy} = \pm\frac{N}{A} \pm \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y \pm \frac{M_{iy}}{I_y} \cdot z = \pm\frac{F}{A} \pm \frac{F \cdot y_F}{I_z} \cdot y \pm \frac{F \cdot z_F}{I_y} \cdot z \qquad 1.2\text{-}4$$

În relația 1.2-4 apare semnul ± deoarece într-un punct oarecare al secțiunii transversale, cele trei eforturi pot produce tensiuni normale de întindere (semnul +) sau de compresiune (semnul -).

Se poate uşor constata că, variația tensiunii normale rezultante pe secțiune este una liniară. Rezultând atât tensiuni de întindere cât şi de compresiune, înseamnă că există puncte în secțiunea transversală în care tensiunea este nulă. Locul geometric al acestor puncte reprezintă *axa neutră*. Ecuația axei neutre rezultă din relația 1.2-4, ca fiind ecuația tensiunii rezultante nule:

$$\sigma_{rez} = \frac{F}{A} + \frac{F \cdot y_F}{I_z} \cdot y_0 + \frac{F \cdot z_F}{I_y} \cdot z_0 = 0 \qquad 1.2\text{-}5$$

În relația 1.2-5, z_0 şi y_0 reprezintă coordonatele unui punct situat pe axa neutră.

Această ecuație reprezintă ecuația unei drepte, iar reprezentarea ei grafică poate fi făcută prin intersecția cu direcțiile principale:

- *intersecția cu direcția Gz*:

$$y_0 = 0$$

$$\Rightarrow z_0 = -\frac{I_y}{A \cdot z_F} = -\frac{i_y^2}{z_F} \qquad 1.2\text{-}6a$$

- *intersecția cu direcția principală Gy*:

$$z_0 = 0$$

$$\Rightarrow y_0 = -\frac{I_z}{A \cdot y_F} = -\frac{i_z^2}{y_F} \qquad 1.2\text{-}6b$$

Se constată că intersecția axei neutre cu direcțiile principale ale secțiunii transversale, are loc pe sensurile negative ale acestora. Din acest motiv trebuie stabilite sensurile pozitive ale direcțiilor principale de inerție. Acestea pot fi fixate de la început, ceea ce poate complica calculul tensiunii normale rezultante, sau se aleg astfel încât ele să fixeze cadranul în care tensiunile produse de cele trei eforturi să aibă acelaşi semn, adică toate să fie de întindere sau toate de compresiune. În cazul nostru vom opta pentru cea de-a doua variantă. Pentru problema pusă în discuție (Fig.1.2-1a), cadranul determinat de sensurile pozitive ale direcțiilor principale (cadranul în care toate eforturile produc tensiuni de întindere, vezi şi Fig.1.2-2c) coincide cu cadranul I trigonometric.

Poziția axei neutre pentru cazul studiat, este prezentată în Fig.1.2-3.

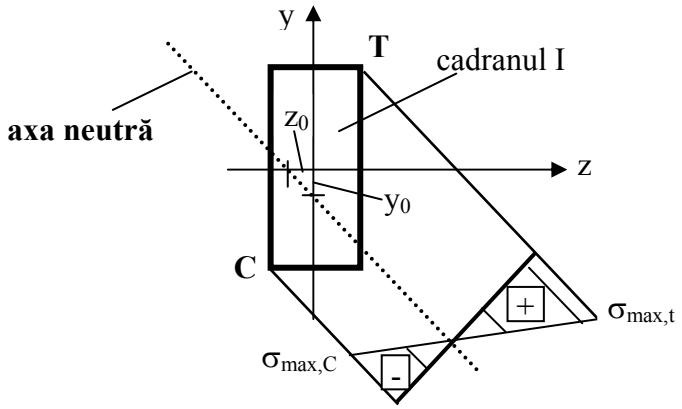


Fig.1.2-3

Poziția axei neutre poate rezulta din relația 1.2-4 în funcție de eforturi:

$$\frac{N}{A} + \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y_0 + \frac{M_{iy}}{I_y} \cdot z_0 = 0 \qquad 1.2\text{-}7$$

Procedând ca mai înainte, se obțin coordonatele punctelor de intersecție ale axei neutre cu direcțiile principale:

- *intersecția cu direcția principală Gz*:

$$y_0 = 0$$
$$z_0 = -\frac{I_y}{A} \cdot \frac{N}{M_{iy}} \qquad 1.2\text{-}8a$$

- *intersecția cu direcția principală Gy*:

$$z_0 = 0$$
$$y_0 = -\frac{I_z}{A} \cdot \frac{N}{M_{iz}} \qquad 1.2\text{-}8b$$

Analizând ecuația axei neutre precum şi coordonatele punctelor de intersecția ale axei neutre cu direcțiile principale de inerție ale secțiunii transversale, rezultă următoarele:

- poziția axei neutre nu depinde de valoarea forței *F*
- poziția axei neutre depinde de poziția inițială a punctului de aplicație al forței, astfel:
  - dacă punctul de aplicație al forței *F* se apropie de centrul de greutate al secțiunii, axa neutră se îndepărtează de centrul de greutate. Când forța se aplică în centrul de greutate, axa neutră se află la infinit.
  - dacă punctul de aplicație al forței *F* se depărtează de centrul de greutate al secțiunii, axa neutră se apropie de centrul de greutate.

Dacă axa neutră intersectează direcțiile principale ale secțiunii, în secțiune există tensiuni atât de întindere cât şi de compresiune. În cazul în care axa neutră nu intersectează secțiunea, tensiunile normale din secțiune sunt de acelaşi fel, fie de întindere fie de compresiune.

Rezultă că există o suprafață în jurul centrului de greutate al secțiunii, în care dacă este situat punctul de aplicație al forței *F*, axa neutră nu intersectează secțiunea sau este cel mult tangentă la aceasta. Această suprafață din jurul centrului de greutate în care aplicând forța *F* axa neutră este cel mult tangentă la secțiune, reprezintă aşa numitul *sâmbure central.* Studiul sâmburelui central pentru câteva suprafețe simple se face într-un paragraf separat.

Dacă forța excentrică *F* este aplicată pe o axă principală de inerție a secțiunii, unul din momente este nul iar axa neutră este paralelă cu acea direcție principală.

Calculul de rezistență la solicitarea compusă de categoria I, solicitare axială cu încovoiere, impune calculul tensiunii rezultante maxime la întindere respectiv, la compresiune.

Pentru cazul analizat, punctul cel mai solicitat la întindere este colțul din cadranul I trigonometric (punctul *T* din Fig.1.2-3), iar cel mai solicitat la compresiune este colțul din cadranul III trigonometric (punctul *C* din Fig.1.2-3). În aceste puncte, toate cele trei eforturi produc valori maxime ale tensiunilor. În punctul *T,* efortul axial produce tensiuni maxime de întindere (de altfel aceleaşi valori în toate punctele), iar momentele încovoietoare, de asemenea tensiuni maxime de întindere. În punctul *C*, efortul axial produce tensiuni maxime de întindere, iar momentele încovoietoare, tensiuni maxime de compresiune.

În punctele cele mai solicitate şi acestea trebuie stabilite, se pune condiția de rezistență cunoscută:

$$\begin{aligned} \sigma_{max,t} &= \sigma_T \le \sigma_{at} \\ \sigma_{max,c} &= \sigma_C \le \sigma_{ac} \end{aligned} \qquad 1.2\text{-}9$$

unde:

σ_{at} – tensiunea admisibilă la întindere

σ_{ac} – tensiunea admisibilă la compresiune

Relațiile explicite pentru calculul de rezistență sunt:

$$\begin{aligned} \pm\frac{N}{A} \pm \frac{M_{iz}}{I_z}\cdot y \pm \frac{M_{iy}}{I_y}\cdot z \le \sigma_{at} \\ \pm\frac{N}{A} \pm \frac{M_{iz}}{I_z}\cdot y \pm \frac{M_{iy}}{I_y}\cdot z \le \sigma_{ac} \end{aligned} \qquad 1.2\text{-}10$$

unde, *y* respectiv *z*, reprezintă coordonatele punctului în care se calculează tensiunea normală.

Variația pe secțiune a tensiunii normale rezultante este prezentată în Fig.1.2-3.

Arcul elicoidal cu pas mic se poate încadra în solicitarea compusă de categoria I, unde toate tensiunile sunt de acelaşi fel, dar tangențiale. Acest caz a fost prezentat în cadrul capitolului de torsiune din primul volum al lucrării.

1.3 SÂMBURELE CENTRAL

În cazul elementelor de rezistență, mai ales din construcții, realizate din materiale care au rezistență mică la întindere (betoane simple, piatră naturală, cărămidă etc.), este foarte important pentru acestea ca pe întreaga secțiune transversală să se producă numai tensiuni de compresiune. În aceste condiții, trebuie precizată poziția punctului de aplicație al forței normale, astfel ca pe

secțiune, tensiunile normale să fie de acelaşi fel. Altfel spus, trebuie determinat sâmburele central.

La stabilirea mărimii sâmburelui central, se porneşte de la relațiile care dau intersecția axei neutre cu direcțiile principale de inerție ale suprafeței secțiunii transversale (relațiile 1.2-6a,b), numai că în acest caz ne interesează coordonatele (z_F ; y_F) ale punctului de aplicație al forței, cunoscând intersecția axei neutre cu direcțiile principale.

1.3.1 Sâmburele central pentru suprafața dreptunghiulară

Suprafața dreptunghiulară a secțiunii transversale de dimensiunile *b*, respectiv *h*, este prezentată în Fig. 1.3.1-1.

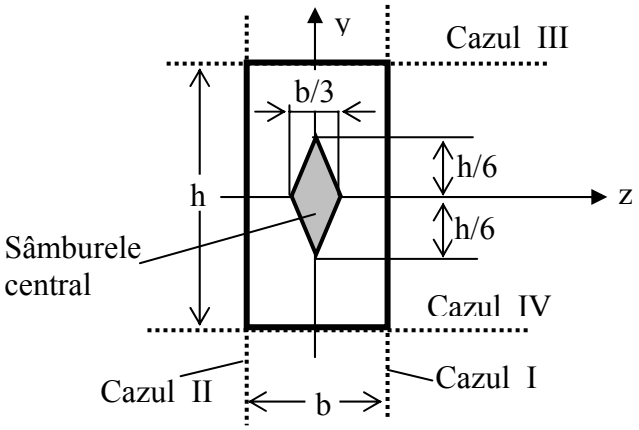


Fig.1.3.1-1

Relațiile de calcul utilizate sunt relațiile 1.2-6a,b:

$$z_0 = -\frac{I_y}{A \cdot z_F}$$
$$y_0 = -\frac{I_z}{A \cdot y_F} \qquad 1.3.1\text{-}1$$

Cazul I: Punem condiția ca axa neutră să fie tangentă la conturul suprafeței în partea dreaptă. În acest caz $z_0 = b/2$:

$$z_0 = \frac{b}{2} \Rightarrow \frac{b}{2} = -\frac{I_y}{A \cdot z_F}$$
$$\Rightarrow z_F = -\frac{2 \cdot I_y}{A \cdot b} = -\frac{2 \cdot \frac{b^3 \cdot h}{12}}{bh \cdot b} = -\frac{b}{6} \qquad 1.3.1\text{-}2a$$

Cazul II: Punem condiția ca axa neutră să fie tangentă la conturul suprafeței în partea stângă (z_0 = - $b/2$):

$$z_0 = -\frac{b}{2} \Rightarrow -\frac{b}{2} = -\frac{I_y}{A \cdot z_F}$$

$$\Rightarrow z_F = \frac{2 \cdot I_y}{A \cdot b} = \frac{2 \cdot \frac{b^3 \cdot h}{12}}{bh \cdot b} = \frac{b}{6} \qquad 1.3.1\text{-}2b$$

Cazul III: Punem condiția ca axa neutră să fie tangentă la conturul suprafeței în partea superioară (y_0 = $h/2$):

$$y_0 = \frac{h}{2} \Rightarrow \frac{h}{2} = -\frac{I_z}{A \cdot y_F}$$

$$\Rightarrow y_F = -\frac{2 \cdot I_z}{A \cdot h} = -\frac{2 \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}}{bh \cdot h} = -\frac{h}{6} \qquad 1.3.1\text{-}2c$$

Cazul IV: Punem condiția ca axa neutră să fie tangentă la conturul suprafeței în partea inferioară (y_0 = - $h/2$):

$$y_0 = -\frac{h}{2} \Rightarrow -\frac{h}{2} = -\frac{I_z}{A \cdot y_F}$$

$$\Rightarrow y_F = \frac{2 \cdot I_z}{A \cdot h} = \frac{2 \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}}{bh \cdot h} = \frac{h}{6} \qquad 1.3.1\text{-}2d$$

Punând condiții ca axa neutră să fie tangentă la conturul suprafeței şi în alte puncte se obțin alte coordonate pentru punctul de aplicație al forței *F*. Forma şi mărimea sâmburelui central obținute pentru suprafața dreptunghiulară sunt prezentate în Fig.1.3.1-1.

1.3.2 Sâmburele central pentru suprafața circulară

Se vor studia aceleaşi cazuri ale poziției axei neutre față de conturul exterior a suprafeței şi se utilizează aceleaşi relații care s-au folosit şi la suprafața dreptunghiulară.

Pozițiile axei neutre la suprafața circulară de diametru *d* pentru cele patru cazuri sunt prezentate în Fig.1.3.2-1.

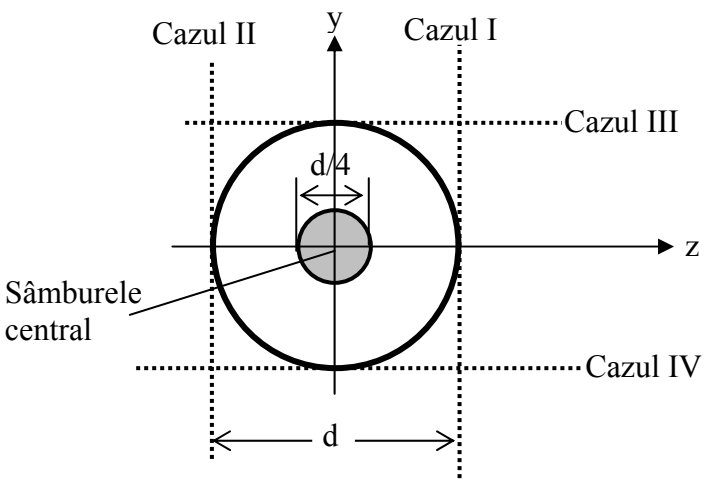


Fig.1.3.2-1

Cazul I:

$$z_0 = \frac{d}{2} \Rightarrow \frac{d}{2} = -\frac{I_y}{A \cdot z_F}$$

$$\Rightarrow z_F = -\frac{2 \cdot I_y}{A \cdot d} = -\frac{2 \cdot \frac{d^4 \cdot \pi}{64}}{\frac{\pi d^2}{4} \cdot d} = -\frac{d}{8} \qquad 1.3.2\text{-}1a$$

Cazul II:

$$z_0 = -\frac{d}{2} \Rightarrow -\frac{d}{2} = -\frac{I_y}{A \cdot z_F}$$

$$\Rightarrow z_F = \frac{2 \cdot I_y}{A \cdot d} = \frac{2 \cdot \frac{d^4 \cdot \pi}{64}}{\frac{\pi d^2}{4} \cdot d} = \frac{d}{8} \qquad 1.3.2\text{-}1b$$

Cazul III:

$$y_0 = \frac{d}{2} \Rightarrow \frac{d}{2} = -\frac{I_z}{A \cdot y_F}$$

$$\Rightarrow y_F = -\frac{2 \cdot I_z}{A \cdot d} = -\frac{2 \cdot \frac{d^4 \cdot \pi}{64}}{\frac{\pi d^2}{4} \cdot d} = -\frac{d}{8} \qquad 1.3.2\text{-}1c$$

Cazul IV:

$$y_0 = -\frac{d}{2} \Rightarrow -\frac{d}{2} = -\frac{I_z}{A \cdot y_F}$$

$$\Rightarrow y_F = \frac{2 \cdot I_z}{A \cdot d} = \frac{2 \cdot \frac{d^4 \cdot \pi}{64}}{\frac{\pi d^2}{4} \cdot d} = \frac{d}{8} \qquad 1.3.2\text{-}1d$$

Punând condiția ca axa neutră să fie tangentă la suprafață şi în alte puncte se obțin alte valori pentru coordonatele punctului de aplicație al forței *F*. În cazul secțiunii circulare se obține tot valoarea *d/8*, ceea ce înseamnă că pentru suprafața circulară sâmburele central este o suprafață circulară de diametru *d/4* în jurul centrului de greutate. Forma şi mărimea sâmburelui central pentru suprafața circulară sunt prezentate în Fig.1.3.2-1.

1.3.3 Sâmburele central la suprafața I simetrică

Ca şi la suprafața dreptunghiulară se pot considera patru tangente la contur (Fig.1.3.3-1), rezultând patru cazuri.

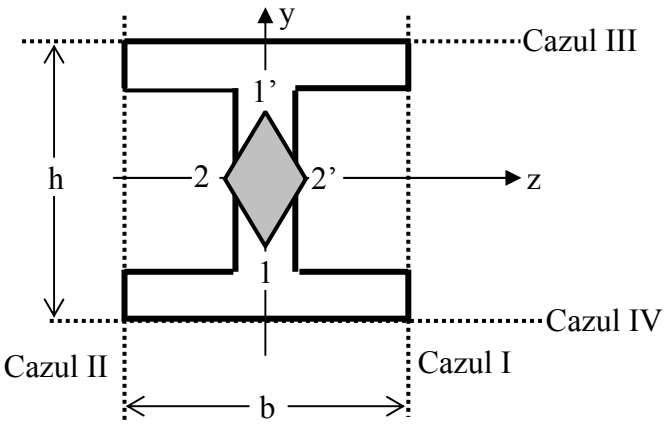


Fig.1.3.3-1

Cazul I şi *II*:

$$z_0 = \pm\frac{b}{2} \Rightarrow \pm\frac{b}{2} = -\frac{I_y}{A \cdot z_F} \Rightarrow z_F = \mp\frac{2 \cdot I_y}{A \cdot b} \qquad 1.3.3\text{-}1a$$

Punctele de aplicație ale forței *F* sunt punctele *2*, respectiv *2'* (Fig.1.3.3-1).

Cazul III şi *IV*:

$$y_0 = \pm\frac{h}{2} \Rightarrow \pm\frac{h}{2} = -\frac{I_z}{A \cdot y_F} \Rightarrow y_F = \mp\frac{2 \cdot I_z}{A \cdot b} \qquad 1.3.3\text{-}1b$$

Punctele de aplicație ale forței F sunt punctele *1*, respectiv *1'* (Fig.1.3.3-1).

Ca şi la secțiunea dreptunghiulară, rezultă că forma sâmburelui central este rombul *12'1'2* (Fig.1.3.3-1).

1.3.4 Tensiuni normale extreme în secțiune, exprimate funcție de limitele sâmburelui central

Pentru anumite elemente de rezistență solicitate la compresiune cu încovoiere, este avantajos ca tensiunile extreme (maxime, respectiv minime) să fie determinate prin reducerea forței normale în raport cu limitele sâmburelui central al suprafeței şi nu în raport cu centrul de greutate, aşa cum se procedează în mod curent.

Să considerăm o suprafață simetrică în raport cu axa *Gy*, iar punctul de aplicație *B* al forței normale este situat pe această axă (Fig.1.3.4-1).

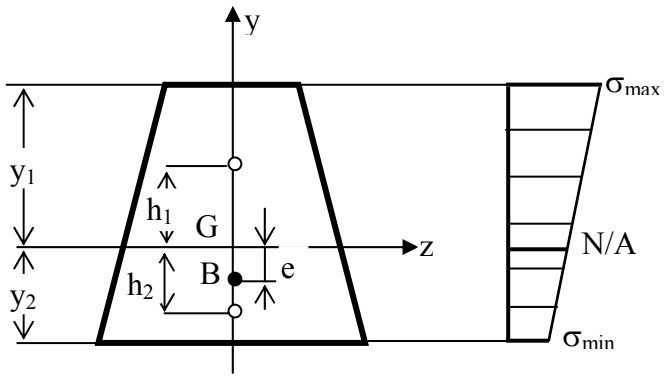


Fig.1.3.4-1

Punctele extreme (limită) ale sâmburelui central al suprafeței pe axa de simetrie *Gy* sunt la distanțele h_1, respectiv h_2 de axa *Gz*, iar forța normală are excentricitatea $GB = e$ (Fig.1.3.4-1)

Forța normală *F* redusă în centrul de greutate al suprafeței, conduce la eforturile:

$$N = \pm F\,, \qquad M_{iz} = F \cdot e \qquad 1.3.4\text{-}1$$

Dacă se consideră forța normală *F* de întindere (la compresiune se va considera cu semnul -), tensiunile extreme se determină cu relațiile cunoscute:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y_1$$
$$\sigma_{min} = \frac{N}{A} - \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y_2 \qquad 1.3.4\text{-}2$$

Ținând seama de expresia momentului încovoietor M_{iz} şi că $I_z = i_z^2 A$, tensiunile extreme (relațiile 1.3.4-2) pot fi scrise şi sub forma:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y_1 = \frac{N \cdot i_z^2}{I_z} + \frac{N \cdot e \cdot y_1}{I_z} = \frac{N \cdot y_1}{I_z} \cdot \left(\frac{i_z^2}{y_1} + e \right)$$
$$\sigma_{min} = \frac{N}{A} + \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot y_2 = \frac{N \cdot i_z^2}{I_z} - \frac{N \cdot e \cdot y_2}{I_z} = \frac{N \cdot y_2}{I_z} \cdot \left(\frac{i_z^2}{y_2} - e \right) \qquad 1.3.4\text{-}3$$

Ținând acum seama de relațiile (1.2-6a,b) care conduc la stabilirea limitelor sâmburelui central (punctul de aplicație al forței) se poate scrie:

$$h_1 = \frac{i_z^2}{y_2} \Rightarrow i_z^2 = h_1 \cdot y_2$$
$$h_2 = \frac{i_z^2}{y_1} \Rightarrow i_z^2 = h_2 \cdot y_1 \qquad 1.3.4\text{-}4$$

care înlocuite în relațiile 1.3.4-3 conduc la:

$$\sigma_{max} = \frac{N \cdot y_1}{I_z} \cdot (h_2 + e) = \frac{N}{W_{y_1}} \cdot (h_2 + e)$$
$$\sigma_{min} = \frac{N \cdot y_2}{I_z} \cdot (h_1 - e) = \frac{N}{W_{y_2}} \cdot (h_1 - e) \qquad 1.3.4\text{-}5$$

Dacă se notează:

$$M_{h_1} = N \cdot (h_2 + e)$$
$$M_{h_2} = N \cdot (h_1 - e) \qquad 1.3.4\text{-}6$$

care sunt momentele forței normale F în raport cu punctele limită ale sâmburelui central al suprafeței de pe axa de simetrie Gy, rezultă că tensiunile extreme din secțiune se pot calcula cu relațiile:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{h_1}}{W_{y_1}}$$
$$\sigma_{min} = \frac{M_{h_2}}{W_{y_2}} \qquad 1.3.4\text{-}7$$

Aceste relații sunt asemănătoare cu cele de la solicitarea de încovoiere.

1.4 TEORII DE REZISTENȚĂ. ÎNCOVOIERE CU TORSIUNE

1.4.1 Teorii de rezistență

La solicitarea simplă de întindere sau compresiune, tensiunea principală σ_1 care poate avea teoretic orice valoare, conduce la rupere atunci când se atinge starea limită $\sigma_1 = \sigma_r$ (rezistența la rupere). La solicitarea pe două direcții, tensiunile principale σ_1 şi σ_2, pot avea de asemenea o infinitate de valori. Este util de ştiut la ce valori sau la ce combinație ale celor două tensiuni principale, se atinge starea limită, se produce ruperea.

În decursul anilor, cercetătorii au încercat să dea un răspuns acestei probleme, care să poată fi confirmat şi de cercetarea experimentală. Astfel, între tensiunile principale s-au stabilit o serie de relații matematice, corespunzătoare atingerii stării limită. Aceste relații sunt cunoscute sub diferite denumiri: *teorii de rupere, teorii de rezistență, teorii ale stărilor limită.* Deoarece relațiile respective sunt stabilite pe baza Teoriei Elasticității, extinderea lor până la rupere este incorectă. Din acest motiv denumirea de teorii de rupere este improprie, mai potrivite sunt denumirile de teorii de rezistență sau teorii ale stărilor limită. Noi le vom numi *teorii de rezistență.*

Ca stare limită se va considera atingerea unei anumite caracteristici de material: limita de elasticitate, limita de proporționalitate, limita de curgere sau rezistența admisibilă, până la care se pot utiliza relațiile teoriei elasticității. Cea mai utilizată limită este *limita de elasticitate* σ_e, care poate fi înlocuită după caz cu σ_p, σ_c, σ_a.

Formularea teoriilor de rezistență se bazează pe observația că, la întinderea simplă, atingerea limitei de elasticitate poate fi constatată cantitativ, prin atingerea uneia dintre mărimile:

- tensiunea de întindere, σ_e
- alungirea, $\varepsilon_e = \sigma_e / E$
- tensiunea tangențială pe secțiunea înclinată la 45^0 (tensiunea tangențială maximă), $\tau_e = \sigma_e / 2$
- energia specifică de deformație, $U_d = \sigma_e^2 / 2E$

- energia specifică modificatoare de formă, $U_{df} = (1+\nu)\sigma_e^2 / 3E$.

După cum se poate constata, teoriile de rezistență stabilesc relații între tensiunile principale σ_1, σ_2, σ_3 care conduc la atingerea uneia sau alteia dintre cele cinci mărimi ale stărilor limită. Cu aceste relații se stabileşte o *tensiune echivalentă* σ_{ech} a stării de tensiune (plană sau spațială), care permite compararea cu tensiunea corespunzătoare stării limită de la solicitarea de întindere simplă, σ_e.

Pentru calculul de rezistență se utilizează criteriul stării limită:

$$\sigma_{ech} \le \sigma_a \qquad 1.4.1\text{-}1$$

În funcție de tensiunile principale, cele cinci teorii de rezistență prezintă următoarele relații:

➢ *Teoria I* (teoria tensiunii normale maxime)

Conform acestei teorii, *starea limită se atinge atunci când tensiunea principală maximă din corp, atinge valoarea tensiunii corespunzătoare stării limită de la solicitarea de întindere simplă:*

$$\sigma_1 = \sigma_e$$
$$\Rightarrow \sigma_{echI} = \sigma_1$$
$$1.4.1\text{-}2$$

➢ *Teoria a II-a* (teoria deformației specifice maxime)

Conform acestei teorii, *starea limită se atinge atunci când lungirea specifică (alungirea) maximă din corp, atinge valoarea lungirii specifice (alungirii) corespunzătoare stării limită de la solicitarea de întindere simplă:*

$$\varepsilon_{max} = \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)\right] = \frac{1}{E}\cdot\sigma_e = \varepsilon_e \qquad 1.4.1\text{-}3a$$

Tensiunea echivalentă pentru teoria a II-a de rezistență este:

$$\sigma_{echII} = \sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3) \qquad 1.4.1\text{-}3b$$

➢ *Teoria a III-a de rezistență* (teoria tensiunii tangențiale maxime)

Conform acestei teorii, *starea limită se atinge atunci când tensiunea tangențială maximă atinge valoarea tensiunii tangențiale corespunzătoare stării limită de la solicitarea de întindere simplă:*

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_e}{2}$$
$$\Rightarrow \sigma_{echIII} = \sigma_1 - \sigma_3 \qquad 1.4.1\text{-}4$$

➢ *Teoria a IV-a* (teoria energiei specifice totale de deformație)

Conform acestei teorii, *starea limită se atinge atunci când energia specifică de deformație este egală cu energia de deformație specifică corespunzătoare stării limită de la întinderea simplă:*

$$\frac{1}{2E}\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2\right)-\frac{\nu}{E}\left(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1\right)=\frac{\sigma_e^2}{2E} \qquad 1.4.1\text{-}5a$$

de unde rezultă:

$$\sigma_{echIV}=\sqrt{\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2\right)-2\nu\left(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1\right)} \qquad 1.4.1\text{-}5b$$

➢ *Teoria a V-a* (teoria energiei specifice modificatoare de formă)

Conform acestei teorii, *starea limită se atinge atunci când energia de deformație specifică modificatoare de formă este egală cu energia de deformație specifică modificatoare de formă corespunzătoare stării limită de la solicitarea de întindere simplă:*

$$\frac{1+\nu}{6E}\left[\left(\sigma_1-\sigma_2\right)^2+\left(\sigma_2-\sigma_3\right)^2+\left(\sigma_3-\sigma_1\right)^2\right]=\frac{1+\nu}{6E}\cdot 2\sigma_e^2 \qquad 1.4.1\text{-}6a$$

de unde se obține:

$$\sigma_{echV}=\sqrt{\frac{1}{2}[\left(\sigma_1-\sigma_2\right)^2+\left(\sigma_2-\sigma_3\right)^2+\left(\sigma_3-\sigma_1\right)^2]} \qquad 1.4.1\text{-}6b$$

Pentru starea plană de tensiune ($\sigma_3 = 0$), tensiunea echivalentă pentru cele cinci teorii de rezistență, capătă următoarea formă:

$$\begin{aligned}
\sigma_{echI} &= \sigma_1\\
\sigma_{echII} &= \sigma_1-\nu\cdot\sigma_2\\
\sigma_{echIII} &= \sigma_1-\sigma_2\\
\sigma_{echIV} &= \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\nu\cdot\sigma_1\sigma_2}\\
\sigma_{echV} &= \sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2-\sigma_1\sigma_2}
\end{aligned} \qquad 1.4.1\text{-}7$$

În cazul particular al elementelor de rezistență la care există numai tensiuni normale σ în lungul axei longitudinale şi tensiuni tangențiale τ în planul secțiunii, tensiunile principale $\sigma_{1,2}$ au expresiile cunoscute:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \qquad 1.4.1\text{-}8$$

care înlocuite în relațiile 1.4.1-7, conduc pentru acestea la următoarea formă:

$$\sigma_{echI} = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \le \sigma_a \qquad 1.4.1\text{-}9a$$

$$\sigma_{echII} = 0{,}35 \cdot \sigma + 0{,}65 \cdot \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \le \sigma_a \qquad 1.4.1\text{-}9b$$

$$\sigma_{echIII} = \sqrt{\sigma^2 + 4 \cdot \tau^2} \le \sigma_a \qquad 1.4.1\text{-}9c$$

$$\sigma_{echIV} = \sqrt{\sigma^2 + 2{,}6 \cdot \tau^2} \le \sigma_a \qquad 1.4.1\text{-}9d$$

$$\sigma_{echV} = \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2} \le \sigma_a \qquad 1.4.1\text{-}9e$$

Cercetările experimentale au demonstrat că pentru materialele tenace rezultate mai apropiate de cele reale dau teoria a III-a şi a V-a de rezistență, iar pentru materialele fragile, teoria a II-a de rezistență.

Ca urmare, dintre relațiile 1.4.1-9 utilizate în calculele de rezistență, se vor alege cele mai potrivite materialului din care sunt realizate elementele respective.

1.4.2 Încovoierea cu torsiune

Încovoierea cu torsiune este una dintre cele mai întâlnite solicitări compuse. În special este întâlnită în cazul arborilor. La această solicitare, cele două eforturi produc tensiuni de natură diferită: momentul încovoietor tensiuni normale σ; momentul de torsiune tensiuni tangențiale τ. Înseamnă că solicitarea de încovoiere cu torsiune este o solicitare compusă de categoria a II-a.

Pentru acest tip de solicitare compusă, calculul de rezistență se face pe baza teoriilor de rezistență (relațiile 1.4.1-9) care impun calculul tensiunii echivalente.

Prima etapă de calcul impune determinarea separată a tensiunilor normale σ, respectiv tangențiale τ. Aceste tensiuni pot rezulta de la solicitări simple sau de la solicitări compuse (de categoria I):

Tensiunile normale care pot apărea, sunt:

$$\sigma = \frac{N}{A} \qquad 1.4.2\text{-}1a$$

$$\sigma = \frac{M_i}{W} \qquad 1.4.2\text{-}1b$$

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_i}{W} \qquad 1.4.2\text{-}1c$$

iar cele tangențiale:

$$\tau_f = \frac{T \cdot S}{b \cdot I} \qquad 1.4.2\text{-}2a$$

$$\tau_t = \frac{M_t}{W_p} \quad sau \quad \tau = \frac{M_t}{W_t} \qquad 1.4.2\text{-}2b$$

$$\vec{\tau}_{rez} = \overrightarrow{\tau_f} + \overrightarrow{\tau_t} \qquad 1.4.2\text{-}2c$$

În calculul care se efectuează se va ține seama de orientarea şi sensul (semnul) tensiunilor din punctul considerat.

În cazul arborilor de secțiune circulară, solicitați la încovoiere şi torsiune, introducând expresiile tensiunilor (relațiile 1.4.2-1b, respectiv 1.4.2-2b) în expresiile tensiunii echivalente pentru cele cinci teorii de rezistență (relațiile 1.4.1-9), acestea capătă forma (funcție de eforturi):

(I) $$\frac{0{,}5 \cdot \left(M_i + \sqrt{M_i^2 + M_t^2}\right)}{W} \le \sigma_a \qquad 1.4.2\text{-}3a$$

(II) $$\frac{0{,}35 \cdot M_i + 0{,}65 \cdot \sqrt{M_i^2 + M_t^2}}{W} \le \sigma_a \qquad 1.4.2\text{-}3b$$

(III) $$\frac{\sqrt{M_i^2 + M_t^2}}{W} \le \sigma_a \qquad 1.4.2\text{-}3c$$

(IV) $$\frac{\sqrt{M_i^2 + 0{,}65 \cdot M_t^2}}{W} \le \sigma_a$$ 1.4.2-3d

(V) $$\frac{\sqrt{M_i^2 + 0{,}75 \cdot M_t^2}}{W} \le \sigma_a$$ 1.4.2-3e

Relațiile 1.4.2-3 utilizate pentru calculul de rezistență la solicitarea compusă de încovoiere cu torsiune, seamănă cu relația de la încovoiere simplă, dacă expresia de la numărător care este o combinație între momentul încovoietor M_i şi cel de torsiune M_t, poate fi considerată un moment echivalent (nici încovoietor nici de torsiune).

Aşadar, calcul de rezistență pentru solicitarea compusă de încovoiere cu torsiune, poate fi făcut pe baza unei relații generale de forma:

$$\frac{M_{ech(...)}}{W} \le \sigma_a$$ 1.4.2-4

unde:

$M_{ech(...)}$ – reprezintă expresia momentului echivalent, corespunzător uneia dintre teoriile de rezistență

W – modulul de rezistență al secțiunii transversale (pentru secțiunile circulare acesta poate fi oricare, inclusiv W_z).

Din relațiile 1.4.2-3 rezultă expresiile momentului echivalent corespunzător celor cinci teorii de rezistență:

(I) $$M_{echI} = 0{,}5 \cdot \left(M_i + \sqrt{M_i^2 + M_t^2}\right)$$ 1.4.2-5a

(II) $$M_{echII} = 0{,}35 M_i + 0{,}65 \cdot \sqrt{M_i^2 + M_t^2}$$ 1.4.2-5b

(III) $$M_{echIII} = \sqrt{M_i^2 + M_t^2}$$ 1.4.2-5c

(IV) $$M_{echIII} = \sqrt{M_i^2 + 0{,}65 \cdot M_t^2}$$ 1.4.2-5d

(V) $$M_{echIII} = \sqrt{M_i^2 + 0{,}75 \cdot M_t^2}$$ 1.4.2-5e

După cum se poate constata, în calculul arborilor de secțiune circulară solicitați la încovoiere şi torsiune, efectul forței tăietoare a fost neglijat.

Calculul de dimensionare la solicitarea compusă: axială, încovoiere şi torsiune, este destul de dificil din punct de vedere al rezolvării ecuației care se obține. Din acest motiv, la aceste solicitări, calculul de dimensionare se efectuează pe baza solicitării de încovoiere şi torsiune, după care se efectuează un calcul de verificare cu dimensiunea obținută de data aceasta la solicitarea compusă inițială. Dacă este nevoie se modifică dimensiunea obținută inițial, până când condiția de verificare este îndeplinită.

1.5 APLICAȚII

Aplicația 1.5.1. *Pentru bara de fontă din Fig.1.5.1-1 se cere:*
a) forța capabilă pentru σ_{at} = 30 MPa şi σ_{ac} = -90 MPa, a = 200 mm
b) diagrama de variație a tensiunii normale în secțiunea periculoasă.

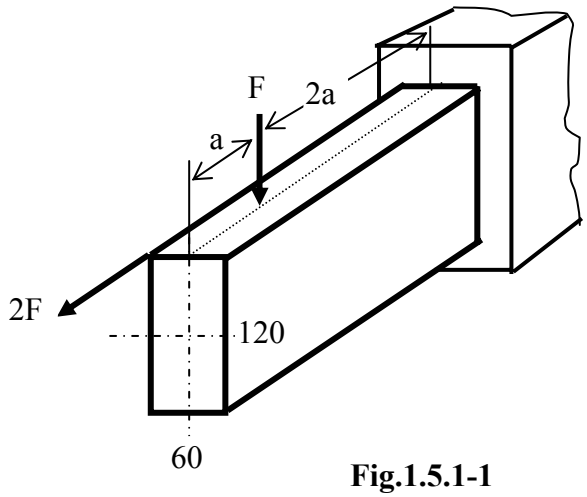
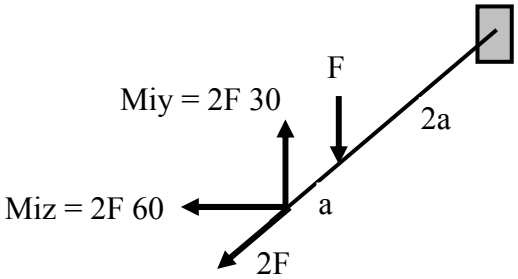


Fig.1.5.1-1

Rezolvare:

Etapele de rezolvare a elementelor de rezistență supuse la solicitări compuse sunt prezentate într-o altă lucrare a autorului.

Mai întâi se reduc forțele aplicate în centrul de greutate al secțiunii în care ele acționează şi torsorul de reducere obținut se pune pe bara reprezentată numai prin axa sa geometrică (Fig.15.1-2).



Cu încărcarea din Fig.1.5.1-2, **Fig.1.5.1-2** i diagramele de eforturi (toate în afara celui tăietor care la astfel de bare se neglijează). Diagramele rezultate sunt prezentate în Fig.1.5.1-3.

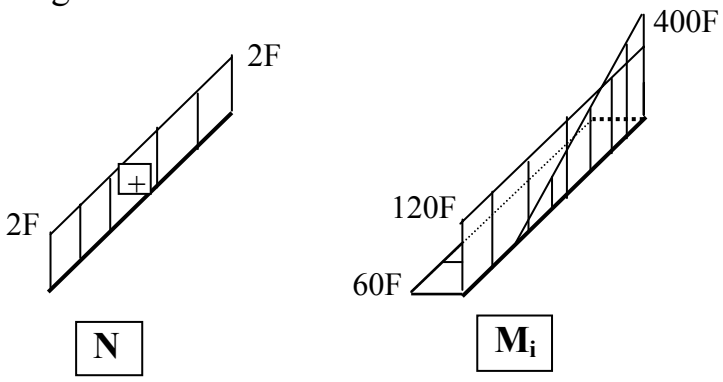


Fig.1.5.1-3

Analizând diagramele de eforturi se constată că secțiunea periculoasă este în încastrare, unde acționează eforturile:

$$\begin{cases} N = 2\,F \\ M_{iz} = 520\,F \\ M_{iy} = 60\,F \end{cases}$$

Toate cele trei eforturi produc tensiuni normale, ceea ce înseamnă că în secțiunea periculoasă se realizează o solicitare compusă de categoria I.

Problema este de efort capabil şi trebuie determinate punctele cele mai întinse, respectiv cele mai comprimate. Studiind semnul tensiunii normale produsă de fiecare efort existent în secțiunea periculoasă, rezultă că punctul cel mai solicitat la întindere este punctul *T*, iar cel mai solicitat la compresiune, punctul *C* (Fig.1.5.1-4).

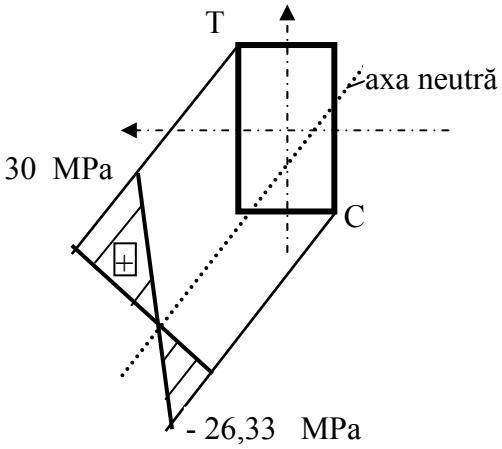


Fig.1.5.1-4

Relațiile de calcul utilizate sunt cele de la solicitarea compusă de categoria I (relațiile 1.2-10), care particularizate pentru punctul *T*, respectiv *C*, au forma:

$$\sigma_{max\,t} = \sigma_T = \frac{2F}{A} + \frac{520 \cdot F}{I_z} \cdot 60 + \frac{60 \cdot F}{I_y} \cdot 30 = 30$$

$$\sigma_{max\,c} = \sigma_C = \frac{2F}{A} - \frac{520 \cdot F}{I_z} \cdot 60 - \frac{60 \cdot F}{I_y} \cdot 30 = -90$$

Din relațiile anterioare rezultă valorile pentru forța capabilă:

$$F'_{cap} \approx 6.32 \quad KN$$

$$F''_{cap} \approx 21{,}8 \quad KN$$

$$\Rightarrow \; F_{cap} = \min\left(F'_{cap}, F''_{cap}\right) = 6{,}32 \quad KN$$

Pentru punctul *b)*, trebuie determinată poziția axei neutre. Tăieturile axei neutre cu direcțiile principale de inerție ale secțiunii transversale, se calculează cu relațiile 1.2-8a,b:

$$z_0 = -\frac{I_y}{A} \cdot \frac{N}{M_{iy}} = -10 \;\; mm$$

$$y_0 = -\frac{I_z}{A} \cdot \frac{N}{M_{iz}} = -4{,}6 \;\; mm$$

Caracteristicile geometrice (A, I_z, I_y) pentru suprafața dreptunghiulară sunt destul de uşor se determinat.

Poziția axei neutre (atenție la primul cadran) şi sensul pozitiv al direcțiilor principale sunt prezentate în Fig.1.5.1-4. Ducând paralele la axa neutră prin punctele cele mai îndepărtate de aceasta (trec prin aceleaşi puncte *T* şi *C*), se poate trasa diagrama de variație a tensiunii normale (vezi Fig.1.5.1-4). La valoarea forței capabile obținute, trebuie determinată tensiunea maximă la compresiune (cea din punctul *C*):

$$\sigma_{max\,c} = \sigma_C = \frac{2 \cdot 6{,}32 \cdot 10^3}{A} - \frac{520 \cdot 6{,}32 \cdot 10^3}{I_z} \cdot 60 - \frac{60 \cdot 6{,}32 \cdot 10^3}{I_y} \cdot 30 = -26{,}33 \;\; MPa$$

Aplicația 1.5.2. *Pentru bara cu forma, dimensiunile şi încărcarea din Fig.1.5.2-1, se cere:*

a) verificarea barei pentru σ_a = 150 MPa

b) diagrama de variație a tensiunii normale în secțiunea periculoasă.

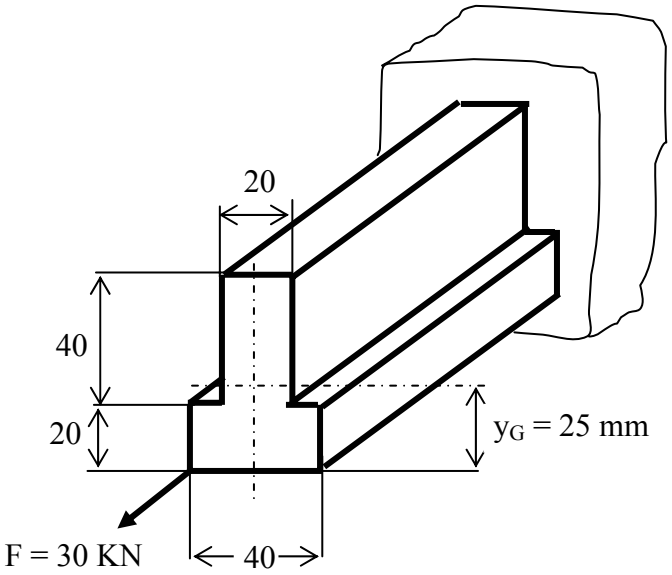


Fig.1.5.2-1

Rezolvare:

Pentru a putea reduce forța *F*, trebuie determinată poziția centrului de greutate al secțiunii transversale. Poziția centrului de greutate y_G este prezentată în Fig.1.5.2-1.

Componentele torsorului de reducere sunt prezentate în Fig.1.5.2-2a iar diagramele de eforturi pentru bară, în Fig.1.5.2-2b,c.

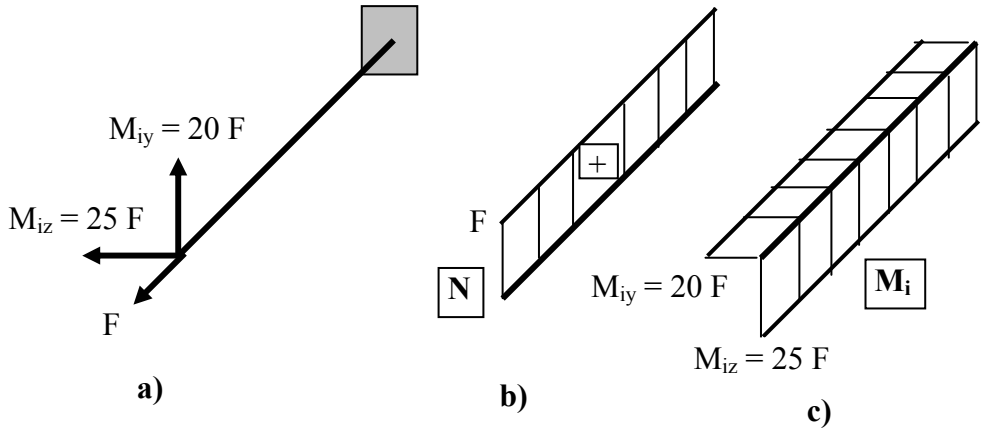


Fig.1.5.2-2

Toate secțiunile sunt la fel de periculoase. În secțiunea periculoasă acționează eforturile:

$$N = F$$
$$M_{iz} = 25\ F$$
$$M_{iy} = 20\ F$$

deci, o solicitare compusă de categoria I. Analizând semnul tensiunii normale produsă de fiecare efort în secțiune, rezultă punctul *T* ca fiind cel mai solicitat la întindere, respectiv *C* la compresiune (Fig.1.5.2-3).

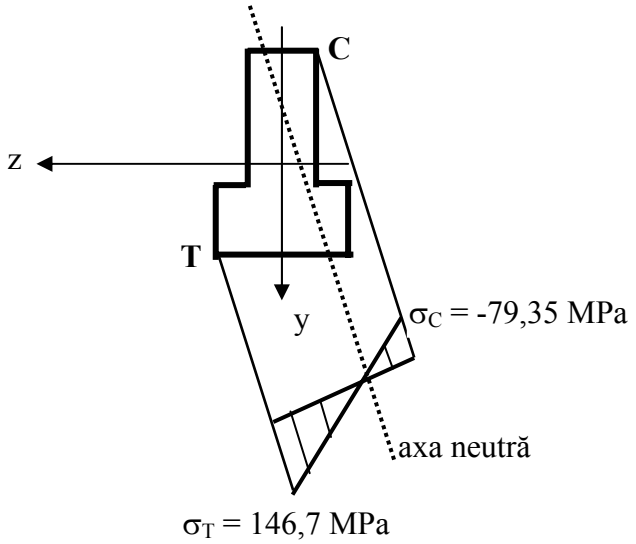


Fig.1.5.2-3

Tensiunile extreme sunt:

$$\sigma_{max\,t} = \sigma_T = \frac{F}{A} + \frac{25\,F}{I_z} \cdot 25 + \frac{20\,F}{I_y} \cdot 20 = 146{,}7\ \ \text{MPa} < \sigma_{at}$$

$$\sigma_{max\,c} = \sigma_C = \frac{F}{A} + \frac{25\,F}{I_z} \cdot 35 + \frac{20\,F}{I_y} \cdot 10 = -79{,}35\ \ \text{MPa} < \sigma_{ac}$$

iar condiția de rezistență este satisfăcută.

În relațiile anterioare s-a avut în vedere că: A = 1600 mm^2, I_z = 49,33 10^4 mm^4, I_y = 13,33 10^4 mm^4.

Tăieturile axei neutre cu direcțiile principale de inerție se calculează cu relațiile:

$$z_0 = -\frac{N}{A} \cdot \frac{I_y}{M_{iy}} = -4{,}16\ \ \text{mm}$$

$$y_0 = -\frac{N}{A} \cdot \frac{I_z}{M_{iz}} = -12{,}33 \text{ mm}$$

Poziția axei neutre, variația tensiunii normale şi valorile extreme ale acesteia sunt prezentate în Fig.1.5.2-3.

Aplicația 1.5.3. *Pentru grinda circulară din Fig.1.5.3-1, se cere:*
a) forța capabilă, pentru σ_a = 150 MPa
b) diagrama de variație a tensiunii normale în secțiunea periculoasă.

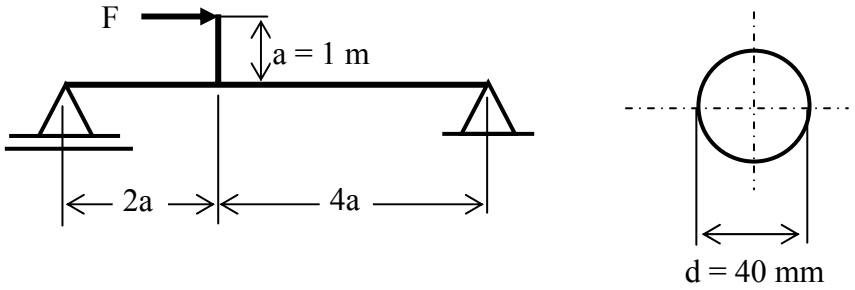


Fig.1.5.3-1

Diagramele de eforturi (N şi M_i) sunt prezentate în Fig.1.5.3-2a,b.

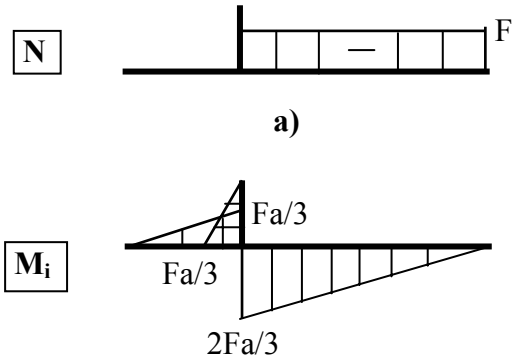


Fig.1.5.3-2

Secțiunea periculoasă este la îmbinarea barei orizontale cu cea verticală. Eforturile din această secțiune sunt:

$$N = -F$$

$$M_{iz} = \frac{2Fa}{3}$$

deci, solicitare compusă categoria I, dar cu un singur moment încovoietor. Punctele cele mai solicitate sunt prezentate în Fig.1.5.3-3.

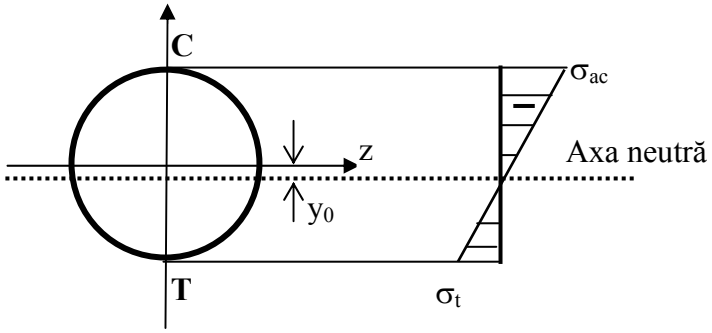


Fig.1.5.3-3

Dintre cele două puncte, mai solicitat este punctul *C*, unde tensiunea normală este:

$$\sigma_{max} = -\frac{F}{A} - \frac{\frac{2}{3}Fa}{I_z} \cdot y_{max} = \sigma_{ac}$$

Dacă se are în vedere că $A = 4\ \pi \cdot 10^2$ mm^2, $I_z = 4\ \pi \cdot 10^4$ mm^4, $y_{max} = 20$ mm, rezultă valoarea forței capabile:

$$F_{cap} = 1{,}4 \text{ KN}$$

Axa neutră în acest caz, intersectează numai direcția principală *Gy* (este paralelă cu *Gz*) la distanța:

$$y_0 = -\frac{N}{A} \cdot \frac{I_z}{M_{iz}} = -0{,}15 \text{ mm}$$

Poziția axei neutre şi variația tensiunii normale pe secțiunea transversală a barei sunt prezentate în Fig.1.5.3-3.

Aplicația 1.5.4. *Pentru bara de secțiune dreptunghiulară din Fig.1.5.4-1, se cere:*

a) tensiunile maxime la întindere, respectiv la compresiune

b) diagrama de variație a tensiunii normale în secțiunea periculoasă.

Se cunosc: $F_1 = 10$ *KN,* $F_2 = 20$ *KN,* $F_3 = 30$ *KN,* $a = 100$ *mm,* $b = 200$ *mm,* $h = 300$ *mm.*

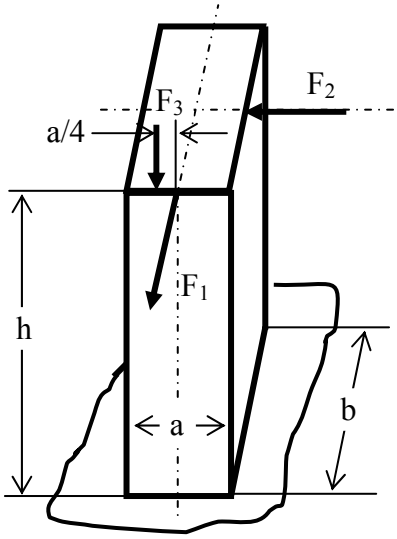


Fig.1.5.4-1

Rezolvare

Torsorul de reducere al forțelor exterioare este prezentat în Fig.1.5.4-2a, iar diagramele de eforturi corespunzătoare în Fig.1.5.4-2b,c.

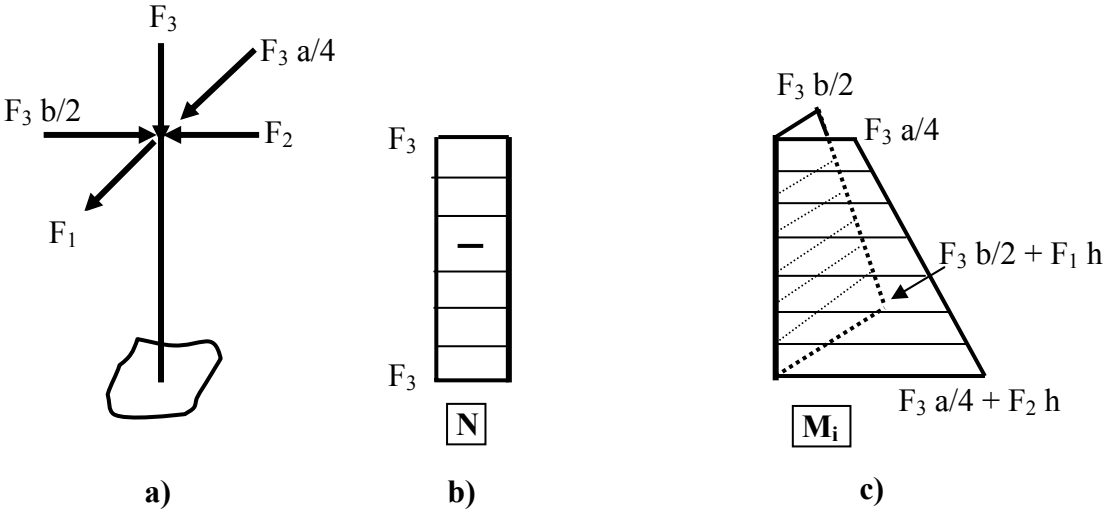


Fig.1.5.4-2

Secțiunea periculoasă este în înțepenire, unde eforturile au valorile:

$$N = F_3$$

$$M_{iz} = F_3 \cdot \frac{b}{2} + F_1 \cdot h$$

$$M_{iy} = F_3 \cdot \frac{a}{4} + F_2 \cdot h$$

Punctele cele mai solicitate din secțiunea periculoasă (T, respectiv C) sunt indicate în Fig.1.5.4-3.

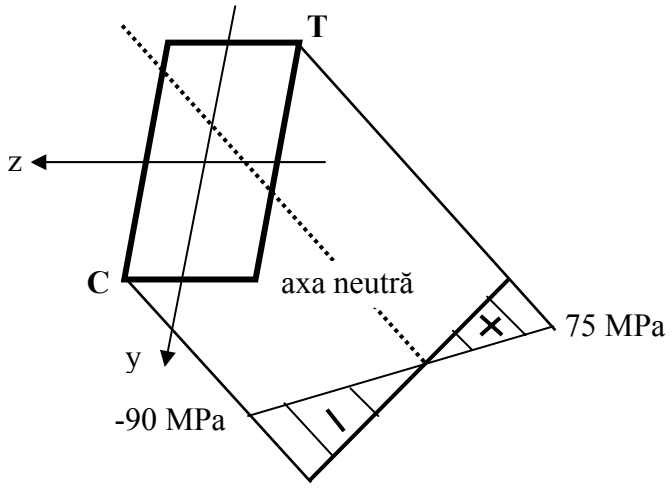


Fig.1.5.4-3

Tensiunea normală din punctele *T*, respectiv *C*, se calculează cu relațiile:

$$\sigma_{max\,t} = \sigma_T = -\frac{N}{A} + \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot \frac{b}{2} + \frac{M_{iy}}{I_y} \cdot \frac{a}{2}$$

$$\sigma_{max\,c} = \sigma_C = -\frac{N}{A} - \frac{M_{iz}}{I_z} \cdot \frac{b}{2} - \frac{M_{iy}}{I_y} \cdot \frac{a}{2}$$

Ținând seama de valoarea mărimilor din relațiile anterioare şi că A = 200 cm^2, I_z = 6666,6 cm^4, I_y = 1666,6 cm^4 , pentru cele două puncte rezultă valorile:

$$\sigma_{max\,t} = \sigma_T \approx 75 \ \text{MPa}$$

$$\sigma_{max\,c} = \sigma_C \approx -90 \ \text{MPa}$$

Tăieturile axei neutre sunt:

$$z_0 = -\frac{I_y}{A} \cdot \frac{N}{M_{iy}} \approx -3{,}7 \ \text{mm}$$

$$y_0 = -\frac{I_z}{A} \cdot \frac{N}{M_{iz}} \approx -22{,}2 \ \text{mm}$$

Poziția axei neutre şi variația tensiunii pe secțiune sunt prezentate în Fig.1.5.4-3.

Aplicația 1.5.5. *Pentru bara de secțiune inelară din Fig.1.5.5-1, se cere:*

a) dimensiunile (d, D) ale secțiunii transversale pentru σ_a = 60 MPa şi k = d/D = 0,8 unde: d – diametrul interior, D – diametrul exterior. La nevoie se va utiliza teoria a V-a de rezistență.

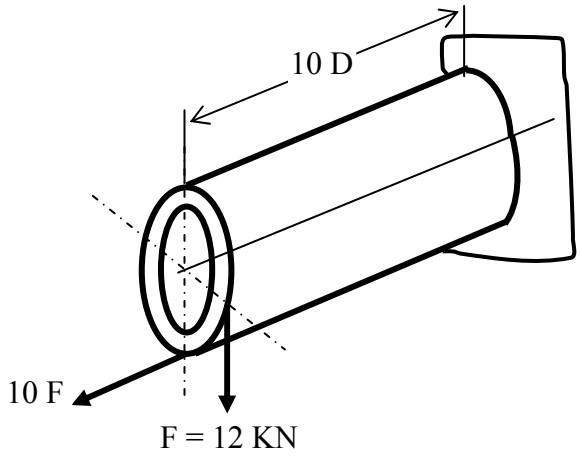


Fig.1.5.5-1

Rezolvare

Torsorul de reducere al forțelor exterioare şi diagramele de eforturi sunt prezentate în Fig.1.5.5-2a, iar diagramele de eforturi aferente, în Fig.1.5.5-2b,c,d.

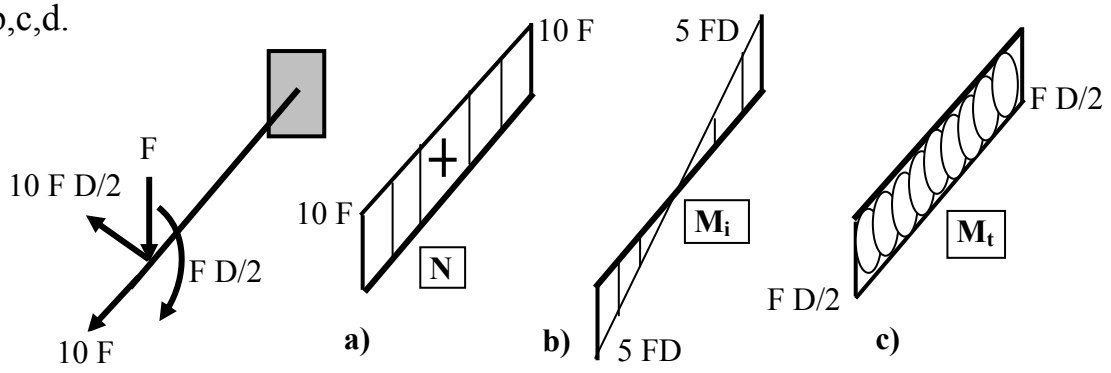


Fig.1.5.5-2

Sunt două secțiuni la fel de periculoase, iar eforturile din această secțiune sunt:

$$N = 10F = 120 \ \ KN$$
$$M_{iz} = 5\,F\,D$$
$$M_t = F \cdot \frac{D}{2}$$

Rezultă că în secțiunea periculoasă se realizează o solicitare compusă de categoria a II-a (tracțiune, încovoiere. torsiune). Calculul de rezistență impune determinarea unei tensiuni echivalente, care necesită o teorie de rezistență. În enunțul problemei se indică teoria a V-a de rezistență. Se poate lucra în tensiuni sau cu momentul echivalent (M_{echV}). Optăm pentru prima variantă:

$$\sigma_{echV} = \sqrt{\sigma_{rez}^2 + 3\tau^2} = \sigma_a$$

unde

$$\sigma_{rez} = \frac{N}{A} + \frac{M_{iz}}{W_z}$$
$$\tau = \frac{M_t}{W_p}$$

Condiția de rezistență după teoria a V-a este atunci:

$$\sqrt{\left[\frac{10\,F}{\frac{\pi D^2}{4}\cdot\left(1-k^2\right)} + \frac{5\,FD}{\frac{\pi D^3}{32}\cdot\left(1-k^4\right)} + \right]^2 + \left(\frac{F\frac{D}{2}}{\frac{\pi D^3}{16}\cdot\left(1-k^4\right)}\right)^2} = \sigma_a$$

După rezolvarea ecuației de mai sus şi ținând seama de valoarea mărimilor care intervin, se obțin dimensiunile secțiunii transversale:

D = 157 mm
d = 125 mm

Aplicația 1.5.6. *Două roți de greutate G_1 şi G_2 sunt montate pe un arbore de secțiune circulară, ca în Fig.1.5.6-1a. Utilizând ipoteza tensiunilor tangențiale maxime, să se determine diametrul arborelui (d), cunoscând: σ_a = 80 MPa şi $G_1 = G_2$ = 100 daN.*

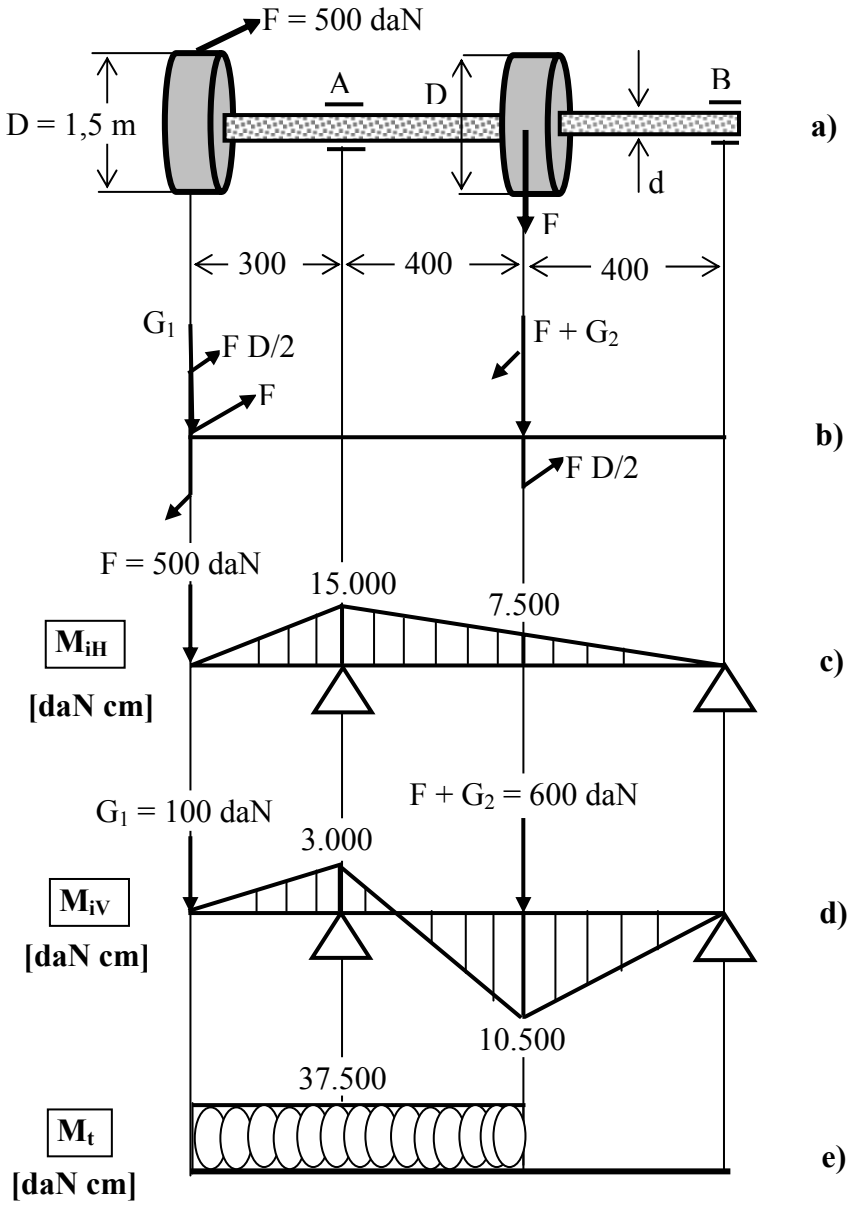


Fig.1.5.6-1

Rezolvare

În Fig.1.5.6-1b se prezintă torsorul de reducere al forțelor exterioare, iar în Fig.1.5.6-1c,d diagramele momentului încovoietor produs de forțele care acționează în plan orizontal, respectiv plan vertical. Diagrama momentului de torsiune este prezentată în Fig.1.5.6-1e.

După o analiză a variației eforturilor rezultă că secțiunea periculoasă este în reazemul *A*, unde momentul încovoietor rezultant are cea mai mare valoare.

În secțiunea periculoasă se realizează o solicitare compusă de categoria a II-a, de către eforturile:

$$M_{iH} = 15.000 \ \text{daN} \cdot \text{cm}$$
$$M_{iV} = 3.000 \ \text{daN} \cdot \text{cm}$$
$$M_{t} = 37.500 \ \text{daN} \cdot \text{cm}$$

Momentul încovoietor rezultant din secțiunea *A,* este:

$$M_{iArez} = \sqrt{M_{iH}^2 + M_{iV}^2} = 15.300 \ \text{daN} \cdot \text{cm}$$

iar momentul echivalent din aceiaşi secțiune, după teoria a III-a de rezistență este:

$$M_{echIII} = \sqrt{M_{iArez} + M_t^2} = 40.500 \ \text{daN} \cdot \text{cm}$$

Condiția de rezistență după teoria a III-a de rezistență şi problemă de dimensionare este:

$$W_{znec} = \frac{M_{echIII}}{\sigma_a} \Rightarrow \frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{M_{echIII}}{\sigma_a}$$
$$\Rightarrow d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{echIII}}{\pi \cdot \sigma_a}} \approx 81 \ \text{mm}$$

Aplicația 1.5.7. *Să se dimensioneze bara cotită de secțiune circulară din Fig.1.5.7-1 după teoria a V-a de rezistență dacă se cunosc:* σ_a *= 150 MPa, F = 15 KN, a = 200 mm.*

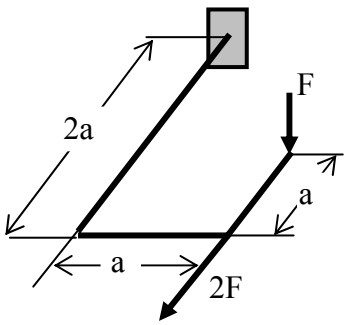


Fig.1.5.7-1

Rezolvare

Pentru acest sistem nu este nevoie de nici o reducere a forțelor exterioare, deoarece ele sunt fixate pe axa longitudinală a barei cotite.

Diagramele de eforturi sunt prezentate în Fig.1.5.7-2a,b,c.

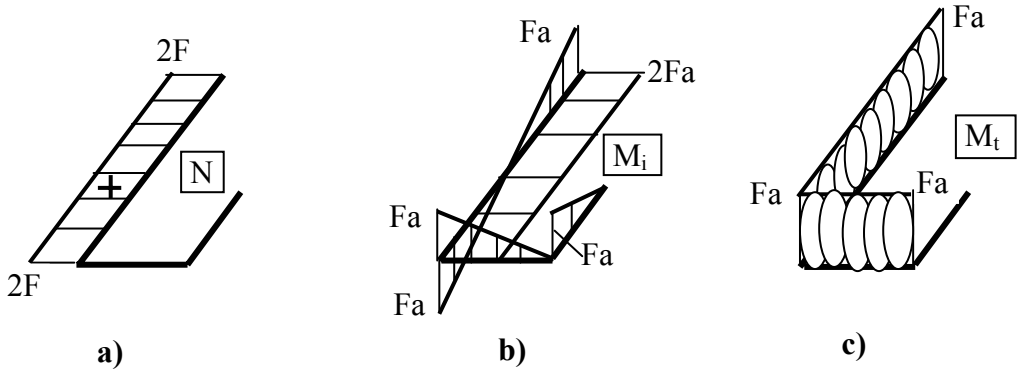


Fig.1.5.7-2

Secțiunea periculoasă este în capetele barei de lungime 2a, unde acționează eforturile:

$$N = 2F$$
$$M_{iH} = 2Fa$$
$$M_{iV} = Fa$$
$$M_t = Fa$$

Solicitarea din secțiunea periculoasă este compusă, de categoria a II-a. Pentru dimensionare se neglijează efortul axial *N*. Dimensionarea se face atunci numai la încovoiere oblică şi torsiune unde se calculează o tensiune echivalentă. Se impune în enunț teoria a V-a de rezistență.

Mai întâi se calculează momentul încovoietor rezultant maxim:

$$M_{irez}^2 = M_{iH}^2 + M_{iV}^2 = 5F^2 a^2$$

iar momentul echivalent după teoria a V-a de rezistență este:

$$M_{echV} = \sqrt{M_{irez}^2 + 0{,}75 \cdot M_t^2} = \sqrt{5.75} \cdot Fa$$

Relația de dimensionare corespunzătoare acestui caz este:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{echV}}{\pi \cdot \sigma_a}} \approx 80 \text{ mm}$$

Deoarece la dimensionare s-a neglijat efortul axial, după determinarea prin rotunjire a dimensiunii secțiunii transversale, se impune o verificare a condiției de rezistență ținând seama şi de efortul axial. Numai după îndeplinirea condiției de rezistență la toate eforturile se poate accepta dimensiunea determinată (eventual modificată).

Pentru cazul prezentat, dimensiunea obținută satisface condiția de rezistență ținând seama şi de efortul axial.

Observație: La toate exemplele prezentate nu s-a pus un accent deosebit pe calculul numeric. A interesat în mod deosebit însuşirea modului de abordare şi a etapelor ce trebuie parcurse în vederea rezolvării acestor tipuri de problemă.

Acest principiu va fi aplicat şi în cazul exemplelor care vor fi prezentate în capitolele următoare.

2. METODE PENTRU CALCULUL DEPLASĂRILOR

2.1 CONSIDERAȚII GENERALE

Pentru un element de rezistență solicitat la încovoiere condiția de rezistență este primordială. De foarte multe ori satisfacerea acesteia nu este suficientă pentru buna funcționare a elementului (piesei) respectiv. În acest sens, este necesar şi un calcul al deformațiilor acestuia.

În acest studiu se cercetează forma pe care o ia după încovoiere (deformare) axa geometrică a elementului de rezistență. Această axă (linie) poartă numele de *fibră medie deformată.*

În cazul încovoierii, o secțiune transversală, suferă o deplasare (Fig.2.1-1), care în funcție de sensul în care se produce, poartă diferite denumiri:

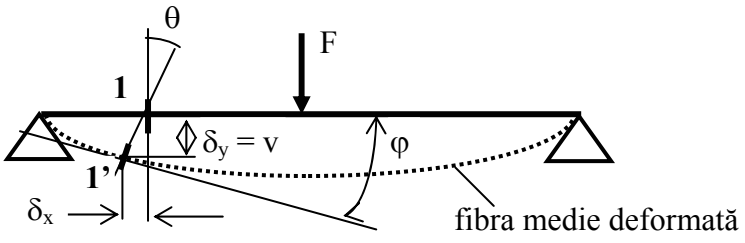


Fig.2.1-1

δ_x – *deplasare axială*, care fiind mică în general se neglijează
$\delta_y = v$ – *deplasare verticală* (transversală) sau săgeată
θ - *deplasare unghiulară* (rotire)

Dacă deplasarea axială δ_x se neglijează, rezultă că $\theta = \varphi$ (Fig.2.1-2).

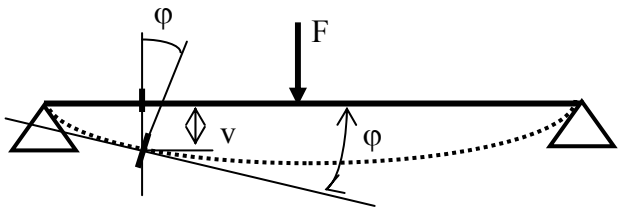


Fig.2.1-2

Deci, o secțiune a unei bare încovoiate suferă două deplasări:

v – deplasare liniară numită şi *săgeată*

φ - *deplasare unghiulară* numită şi *rotire*.

Studiul deformaţiilor barei constă în a cunoaşte funcţiile:

$$v = f_1(x) \quad \text{şi} \quad \varphi = f_2(x) \qquad 2.1\text{-}1$$

pentru orice secţiune a acesteia.

Într-un sistem de axe ca cel din Fig.2.1-3,

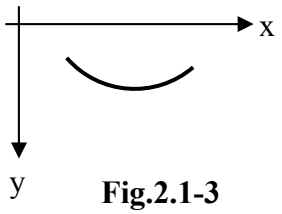


Fig.2.1-3

rezultă că

$$\varphi = \frac{dv}{dx} \qquad 2.1\text{-}2$$

Întrucât deformaţiile sunt mici se poate considera că $tg\varphi \approx \varphi$. Această egalitate poate fi acceptată numai pentru barele cu deformaţii relativ mici, excluzându-se cele cu deformaţii mari (arcul spiral, lamele elastice etc.).

2.2 METODE CLASICE PENTRU CALCULUL DEPLASĂRILOR BARELOR DREPTE SOLICITATE LA ÎNCOVOIERE

Pentru calculul celor două deplasări produse la solicitarea de încovoiere a barelor drepte, s-au dezvoltat mai multe metode. În continuare se vor prezenta câteva dintre acestea, de fapt cele mai utilizate.

2.2.1 Metoda dublei integrări (Metoda ecuaţiei diferenţiale a fibrei medii deformate)

Se consideră că într-o secţiune curentă *x* fibra medie deformată a barei are raza de curbură ρ (a se vedea încovoierea simplă), a cărei expresie în geometria diferenţială este de forma următoare:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{\dfrac{d^2v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{dv}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \approx \pm \frac{d^2v}{dx^2} \qquad 2.2.1\text{-}1$$

De la studiul încovoierii pure s-a văzut că între raza de curbură a fibrei medii, momentul încovoietor M_i şi rigiditatea barei *EI* există relația:

$$\rho = \frac{E I_z}{M_{iz}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\rho} = \frac{M_{iz}}{E I_z} \qquad 2.2.1\text{-}2$$

Din relațiile 2.2.1-1 şi 2.2.1-2 se obține:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \pm \frac{M_{iz}}{E I_z} \qquad 2.2.1\text{-}3$$

Cu sistemul de axe din Fig.2.1-3 derivata de ordinul doi *v''* a săgeții este negativă, iar momentul încovoietor este pozitiv. Rezultă că relația 2.2.1-3 capătă forma finală:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M_{iz}}{E I_z} \qquad 2.2.1\text{-}4$$

Derivând încă de două ori relația 2.2.1-4, se obține:

$$\frac{d^3 v}{dx^3} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{M_{iz}}{E I_z}\right) = -\frac{T_y}{E I_z} \qquad 2.2.1\text{-}5a$$

$$\frac{d^4 v}{dx^4} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{T_y}{E I_z}\right) = -\frac{-p_y}{E I_z} = \frac{p}{E I_z} \qquad 2.2.1\text{-}5b$$

Integrând o dată ecuația fibrei medii deformate (relația 2.2.1-4) se obține rotirea secțiunii φ:

$$\varphi = \frac{dv}{dx} = -\int \frac{M_{iz}}{E I_z} dx + C_1 \qquad 2.2.1\text{-}6a$$

iar integrând din nou se obține săgeata *v*:

$$v = \int \left(-\int \frac{M_{iz}}{E I_z} dx \right) dx + C_1 x + C_2 \qquad 2.2.1\text{-}6b$$

unde C_1 şi C_2 sunt două constante de integrare care se determină din condițiile de rezemare şi de continuitate la trecerea de la un interval la altul. Astfel:

- *pe reazeme simple*

$$v = 0 \quad \text{şi} \quad \varphi \neq 0 \qquad 2.2.1\text{-}7a$$

- *în înțepeniri*

$$v = 0 \quad \text{şi} \quad \varphi = 0 \qquad 2.2.1\text{-}7b$$

Pentru calculul deplasărilor produse la încovoiere prin această metodă, se indică parcurgerea următoarelor etape:

- se scriu funcțiile momentului încovoietor pe fiecare interval caracteristic al barei
- se scrie ecuația fibrei medii deformate pentru fiecare interval
- se integrează o dată această ecuație şi se obține expresia rotirii φ
- se mai integrează o dată relația obținută şi rezultă expresia pentru săgeata *v*
- se pun toate condițiile de rezemare şi de continuitate de la un interval la altul şi se obțin constantele de integrare
- se scriu expresiile finale pentru deplasări pe fiecare interval
- se calculează deplasările cerute.

***Atenție*:** Fiecare interval caracteristic introduce două constante de integrare. Acest lucru constituie un mare inconvenient pentru metoda dublei integrări.

Aplicație: *Pentru bara de rigiditate constantă din Fig.2.2.1-1 să se calculeze deplasarea (săgeata) maximă şi rotirea (deplasarea unghiulară) pe reazeme.*

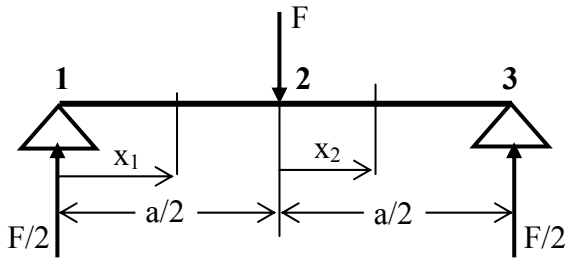


Fig.2.2.1-1

Rezolvare

Pentru această bară se delimitează două intervale caracteristice: 1-2 şi 2-3.

Se rezolvă problema în paralel pe cele două intervale, urmându-se etapele de rezolvare recomandate la finalul prezentării acestei metode.

Intervalul 1-2	Intervalul 2-3
$M_{12} = \frac{F}{2} x_1$	$M_{23} = \frac{F}{2}\left(\frac{a}{2} + x_2\right) - F x_2 = -\frac{F}{2} x_2 + \frac{F a}{4}$
$E I v'' = -\frac{F}{2} x_1$	$E I v'' = \frac{F}{2} x_2 - \frac{F a}{4}$
$E I \varphi = -\frac{F}{4} x_1^2 + C_1$	$E I \varphi = \frac{F}{4} x_2^2 - \frac{F a}{4} x_2 + C_3$
$E I v = -\frac{F}{12} x_1^3 + C_1 x + C_2$	$E I v = \frac{F}{12} x_2^3 - \frac{F a}{8} x_2^2 + C_3 x_2 + C_4$
$x_1 = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow C_2 = 0$	$v_3 = 0 \Rightarrow v_{x_2 = a/2} = 0 \Rightarrow$
	$-2Fa^3 + 48C_3 a + 96C_4 = 0 \quad (1)$
	$\varphi_{x_2=0} = 0 \Rightarrow C_3 = 0 \quad (2)$

Condiția de continuitate la trecerea de la un interval la altul (secțiunea 2) este:

$$\varphi_{x_1 = a/2} = \varphi_{x_2 = 0} = 0$$

Din relația (1) ținând seama de (2), se obține:

$$C_4 = \frac{F a^3}{48}$$

iar condiția de continuitate conduce la

$$C_1 = \frac{F a^2}{16}$$

Constantele de integrare fiind determinate, relațiile pentru deplasări corespunzătoare celor două intervale caracteristice au forma finală:

Pentru intervalul 1-2:

$$EI\varphi = -\frac{F}{4}x_1^2 + \frac{Fa^2}{16}$$

$$EIv = -\frac{F}{12}x_1^3 + \frac{Fa^2}{16}x_1$$

iar pentru intervalul 2-3:

$$EI\varphi = \frac{F}{4}x_2^2 - \frac{Fa}{4}x_2$$

$$EIv = -\frac{F}{12}x_2^3 - \frac{Fa}{8}x_2^2 + \frac{Fa^3}{48}$$

Acum se pot calcula deplasările solicitate:

$$v_{max} = v_{x_1=a/2} = v_{x_2=0} = \frac{Fa^3}{48EI_z}$$

$$\varphi_1 = \varphi_3 = \varphi_{x_1=0} = -\varphi_{x_2=a/2} = \frac{Fa^2}{16EI_z}$$

2.2.2 Metoda parametrilor inițiali (metoda parametrilor în origine)

Când în lungul barei există mai multe intervale (multe expresii pentru momentul încovoietor), metoda dublei integrări devine dificilă, din cauza multor constante de integrare (două pentru fiecare interval). În continuare se prezintă o metodă universală pentru calculul deplasărilor unei bare drepte de rigiditate constantă, numită *metoda parametrilor inițiali* (*metoda parametrilor în origine*) sau *metoda Macaulay.* În această metodă intervin numai două constante de integrare şi anume: *valorile inițiale* (în origine) *ale săgeții şi rotirii*.

Se consideră o bară dreaptă (Fig.2.2.2-1) la care nu se precizează modul de rezemare.

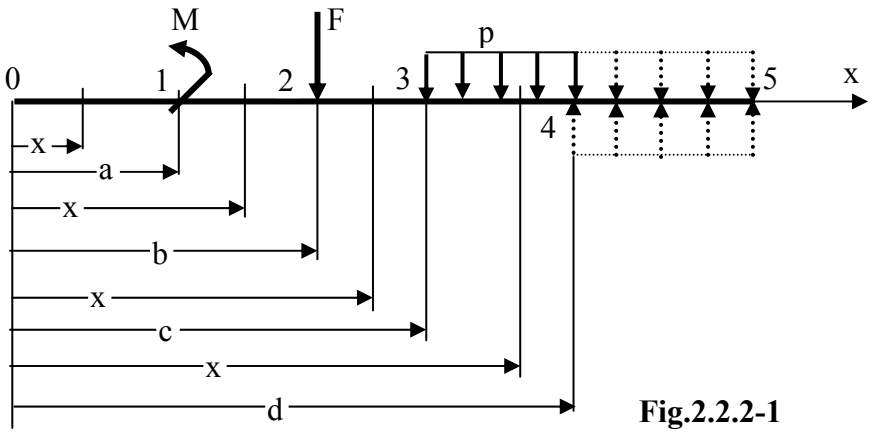


Fig.2.2.2-1

Grinda este încărcată cu un moment concentrat *M*, o forță concentrată *F* şi o sarcină uniform distribuită *p*. Față de originea *O* a sistemului de referință forțele exterioare au coordonatele *a, b*, respectiv *c*. Cu *d* s-a notat distanța de la originea sistemului până la secțiunea în care se termină acțiunea sarcinii uniform distribuite.

Pe cele patru intervale funcțiile momentului încovoietor sunt:

$$M_{01} = 0 \qquad 2.2.2\text{-}1a$$

$$M_{12} = -M(x-a)^0 \qquad 2.2.2\text{-}1b$$

$$M_{23} = -M(x-a)^0 - F(x-b)^1 \qquad 2.2.2\text{-}1c$$

$$M_{34} = -M(x-a)^0 - F(x-b)^1 - p\frac{(x-c)^2}{2} \qquad 2.2.2\text{-}1d$$

$$M_{45} = -M(x-a)^0 - F(x-b)^1 - p\frac{(x-c)^2}{2} + p\frac{(x-d)^2}{2} \qquad 2.2.2\text{-}1e$$

După secțiunea *4* unde sarcina uniform distribuită se termină, se consideră că aceasta ar continua până la capătul barei. În plus se aplică o sarcină egală şi de sens contrar cu ea, aşa că de fapt practic de la *4* spre dreapta nu mai acționează nici o sarcină. Se poate constata că pe fiecare interval, ecuația de momente este cea de pe intervalul precedent plus un nou termen.

Se integrează relațiile 2.2.2-1a,b,c,d,e ştiind că:

$$E\,I\,v'' = -M_i \qquad 2.2.2\text{-}2$$

Toate binoamele din relațiile 2.2.2-1a,b,c,d,e se integrează sub formele:

$$\int (x-a)^0\,dx = x-a$$

$$\int (x-b)dx = \frac{(x-b)^2}{2} \qquad 2.2.2\text{-}3$$

ceea ce conduce numai la o schimbare a constantelor de integrare.

Integrând o singură dată (relațiile 2.2.2-1) se obțin expresiile rotirilor:

$$EI\,\varphi_{01} = C_1 \qquad 2..2\text{-}4a$$

$$EI\,\varphi_{12} = M(x-a) + C_2 \qquad 2.2.2\text{-}4b$$

$$EI\,\varphi_{23} = M(x-a) + F\frac{(x-b)^2}{2} + C_3 \qquad 2.2.2\text{-}4c$$

$$EI\,\varphi_{34} = M(x-a) + F\frac{(x-b)^2}{2} + p\frac{(x-c)^3}{6} + C_4 \qquad 2.2.2\text{-}4d$$

$$EI\,\varphi_{45} = M(x-a) + F\frac{(x-b)^2}{2} + p\frac{(x-c)^3}{6} - p\frac{(x-d)^3}{6} + C_5 \qquad 2.2.2\text{-}4e$$

Integrând încă o dată relațiile 2.2.2-4, se obțin expresiile pentru săgeți:

$$EI\,v_{01} = C_1\,x + D_1 \qquad 2.2.2\text{-}5a$$

$$EI\,v_{12} = M\frac{(x-a)^2}{2} + C_2\,x + D_2 \qquad 2.2.2\text{-}5b$$

$$EI\,v_{23} = M\frac{(x-a)}{2} + F\frac{(x-b)^3}{6} + C_3\,x + D_3 \qquad 2.2.2\text{-}5c$$

$$EI\,v_{34} = M\frac{(x-a)^2}{2} + F\frac{(x-b)^3}{6} + p\frac{(x-c)^4}{24} + C_4\,x + D_4 \qquad 2.2.2\text{-}5d$$

$$EI\,v_{45} = M\frac{(x-a)^2}{2} + F\frac{(x-b)^3}{6} + p\frac{(x-c)^4}{24} - p\frac{(x-d)^4}{24} + C_5\,x + D_5 \qquad 2.2.2\text{-}5e$$

Se notează cu φ_0 rotirea, respectiv cu v_0 săgeata, în originea sistemului de coordonate. Scriind relația rotirii pentru origine ($x = 0$), rezultă:

$$EI\,\varphi_0 = C_1 \qquad 2.2.2\text{-}6$$

Scriind prima relație şi a doua a rotirii în secțiunea *1* (pentru $x = a$) care sunt egale (continuitate de la un interval la altul), se obține:

$$C_1 = M(a-a) + C_2 \;\Rightarrow\; C_1 = C_2 \qquad 2.2.2\text{-}7a$$

La fel, între a doua şi a treia pentru $x = b$:

$$M(x-a) + C_2 = M(b-a) + \frac{F}{2}(b-b)^2 + C_3 \;\Rightarrow\; C_2 = C_3 \qquad 2.2.2\text{-}7b$$

Procedând mai departe la fel, se obține o relație între constantele de integrare C:

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 \qquad 2.2.2\text{-}7c$$

Urmând acelaşi raționament pentru săgeți, se obține în final:

$$D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D_5 \qquad 2.2.2\text{-}7d$$

Rezultă că relațiile pentru deplasări se pot scrie sub o formă concentrată (se începe cu constantele de integrare):

$$EI\,\varphi = EI\varphi_0 + M(x-a) + F\frac{(x-b)^2}{2} + p\frac{(x-c)^3}{6} - p\frac{(x-d)^3}{6}$$
$$EI\,v = EIv_0 + EI\varphi_0\,x + M\frac{(x-a)^2}{2} + F\frac{(x-b)^3}{6} + p\frac{(x-c)^4}{24} - p\frac{(x-d)^4}{24} \qquad 2.2.2\text{-}8$$

sau sub o altă formă:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{1}{EI}\left[\sum M\frac{(x-a)}{1!} + \sum F\frac{(x-b)^2}{2!} + \sum p\frac{(x-c)^3}{3!} - p\sum\frac{(x-d)^3}{3!}\right]$$
$$v = v_0 + \varphi_0 + \frac{1}{EI}\left[\sum M\frac{(x-a)^2}{2!} + \sum F\frac{(x-b)^3}{3!} + \sum p\frac{(x-c)^4}{4!} - \sum p\frac{(x-d)^4}{4!}\right] \qquad 2.2.2\text{-}9$$

În relațiile 2.2.2-8, respectiv 2.2.2-9, forțele exterioare *M, F, p* intervin cu semn. Ele au semnul + dacă sunt orientate pe bară aşa cum sunt orientate pe bara din Fig.2.2.2-1 sau cum se mai prezintă în Fig.2.2.2-2.

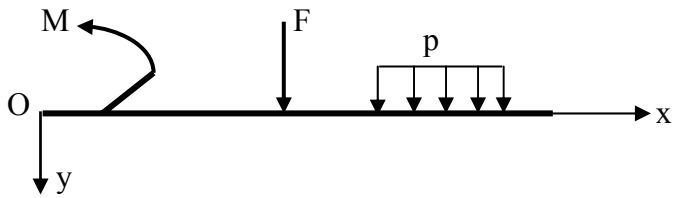


Fig.2.2.2-2

Originea sistemului de referință se alege întotdeauna în secțiunea cea mai din stânga a barei.

Constantele de integrare φ_0 şi v_0 (care sunt numai două) se determină din condițiile de rezemare. După ce acestea au fost determinate şi relațiile pentru deplasări sunt în forma lor finală, se poate trece la calculul deplasărilor (săgeți sau rotiri) în orice secțiune a barei. Trebuie avut în vedere faptul că atunci când se determină constantele de integrare sau se calculează deplasările, în relațiile finale intervin numai termenii care provin de la sarcinile situate strict în stânga secțiunii respective. De altfel pentru o secțiune situată unde acționează o sarcină, termenii din relații au valori nule, iar pentru secțiuni situate după sarcini, termenii sunt negativi (nu se ia în considerare exponentul). Astfel de termeni se elimină (nu se iau în considerare).

Aplicație: *Pentru bara dreaptă din Fig.2.2.2-3 să se calculeze săgeata şi rotirea secțiunii 2. Se cunoaşte EI = 1,4 KN m²*.

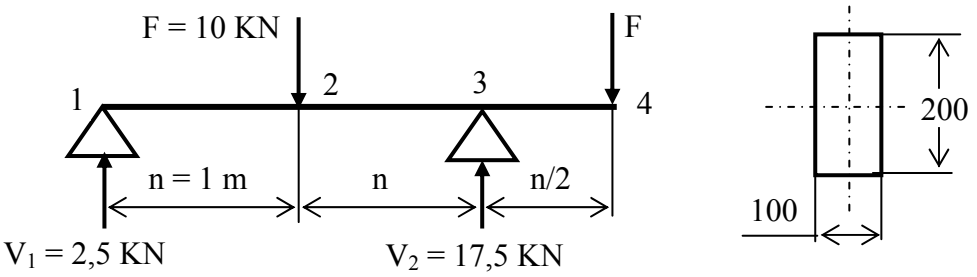


Fig.2.2.2-3

Rezolvare

Se calculează reacțiunile:

$V_1 = 2{,}5$ KN

$V_2 = 17{,}5$ KN

Originea sistemului de referință este în secțiunea *1*. Nu există decât numai sarcini concentrate.

Relațiile pentru deplasări (relațiile 2.2.2-8) particularizate pentru problema dată sunt:

$$EI\varphi = EI\varphi_0 - V_1\frac{(x-0)^2}{2} + F\frac{(x-n)^2}{2} - V_2\frac{(x-2n)^2}{2}$$

$$EI\,v = EI\,v_0 + EI\varphi_0\,x - V_1\frac{(x-0)^3}{6} + F\frac{(x-n)^3}{6} - V_2\frac{(x-2n)^3}{6}$$

În relațiile de mai sus, se avut în vedere că $\varphi_0 = \varphi_1$, $v_0 = v_1$ iar forța *F* din secțiunea *4* nu s-a luat în considerare deoarece la calculul deplasărilor nu va avea efect (paranteza va avea valoarea zero).

Condițiile la limită pentru calculul parametrilor în origine sunt:

- pentru $x = 0 \Rightarrow v_1 = v_0 = 0$
- pentru $x = 2\,n = 2\,m \Rightarrow v_3 = 0$

Înlocuind aceste condiții în relațiile deplasărilor, rezultă:

$$0 = EI\varphi_0 \cdot 2n - V_1\frac{(2n)^3}{6} + F\frac{(2n-n)^3}{6}$$

Din această relație se calculează rotirea în origine:

$$\varphi_0 = \varphi_1 = 0{,}592 \text{ rad}$$

Cunoscându-se acum deplasările din origine (parametri inițiali) se poate trece la calculul săgeții în secțiunea 2. Pentru aceasta în relația săgeții se ia $x = n = 1\,m$:

$$EI\,v_2 = EI\,\varphi_0\,n - V_1\frac{(n-0)^3}{6} + F\frac{(n-n)^3}{6} - V_2\frac{(n-2n)^3}{6} =$$

$$= EI\,\varphi_0\,n - V_1\frac{(n-0)^3}{6}$$

$$\Rightarrow\ v_2 = 0{,}2952\ \ m$$

Pentru calculul rotirii în secțiunea *3*, în relația rotirii se consideră *x = 2n* şi se obține:

$$\varphi_2 = 0{,}297\ \ rad$$

2.2.3 Metoda grinzii conjugate (reciproce) sau metoda Mohr

Se consideră o grindă simplu rezemată încărcată cu o sarcină distribuită după o lege oarecare *p(x)* ca în Fig.2.2.3-1a. Sub acțiunea acesteia, grinda se deformează la încovoiere.

Ne propunem să determinăm deplasările (săgeata şi rotirea) într-o secțiune oarecare a acestei bare, secțiune poziționată de coordonata x. Pentru grinda dată numită *grindă reală*, considerăm că am trasat diagrama momentului încovoietor (Fig.2.2.3-1b). Înseamnă că se pot scrie următoarele relații (deja cunoscute):

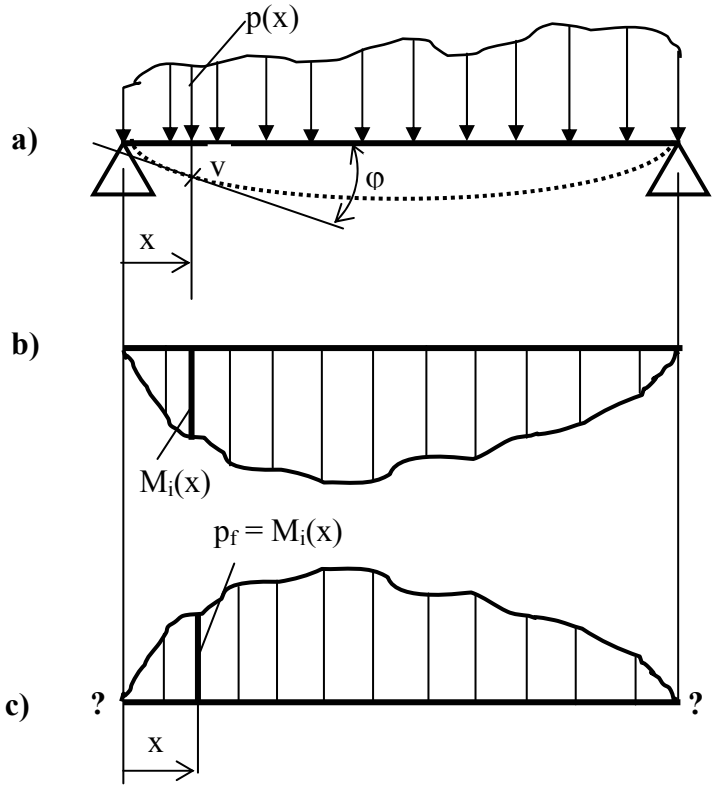


Fig.2.2.3-1

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -M_i(x) \qquad 2.2.3\text{-}1a$$

$$\frac{dM_i(x)}{dx} = T(x) \qquad 2.2.3\text{-}1b$$

$$\frac{dT(x)}{dx} = -p(x) \qquad 2.2.3\text{-}1c$$

$$\frac{d^2M_i(x)}{dx^2} = \frac{dT(x)}{dx} = -p(x) \qquad 2.2.3\text{-}1d$$

Se consideră acum o altă grindă numită *grindă conjugată* sau *grindă reciprocă* al cărui mod de rezemare încă nu se precizează şi pe care o încărcăm cu *sarcina fictivă* p_f ce variază după aceeaşi lege ca şi momentul încovoietor $M_i(x)$ al grinzii reale (Fig.2.2.3-1c):

$$p_f(x) = M_i(x) \qquad 2.2.3\text{-}2$$

Toate mărimile care se vor referi la grinda conjugată vor purta de acum înainte indicele f.

Se poate scrie pentru grinda conjugată:

$$\frac{dM_{if}}{dx} = T_f \quad ; \quad \frac{dT_f}{dx} = -p_f$$
$$\Rightarrow \quad \frac{d^2M_{if}}{dx^2} = \frac{dT_f}{dx} = -p_f \qquad 2.2.3\text{-}3$$

Ținând seama de relația 2.2.3-1a, rezultă:

$$EI\frac{d^2v}{dx^2} = -M_i(x) = -p_f$$
$$\Rightarrow \quad EI\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d^2M_{if}}{dx^2} \qquad 2.2.3\text{-}4$$

Integrând o dată relația 2.2.3-4 se obține:

$$EI\frac{dv}{dx} = \frac{dM_{if}}{dx} + C_1 \qquad 2.2.3\text{-}5$$

Se pune acum condiția ca grinda conjugată să fie astfel rezemată încât constanta de integrare $C_1 = 0$. Cu această condiție, relația 2.2.3-5 devine:

$$EI\frac{dv}{dx} = EI\varphi = \frac{dM_{if}}{dx} = T_f \qquad 2.2.3\text{-}6$$

de unde rezultă expresia pentru rotire:

$$\varphi = \frac{T_f}{E\,I_z} \qquad 2.2.3\text{-}7$$

Integrând încă o dată relația 2.2.3-4 (sau relația 2.2.3-6) se obține expresia săgeții:

$$EI\,v = M_{if} \;\Rightarrow\; v = \frac{M_{if}}{EI_z} \qquad 2.2.3\text{-}8$$

Şi la această integrare se impun condiții de rezemare astfel încât constanta de integrare care apare să fie nulă.

Modurile de rezemare pentru grinzile conjugate ale câtorva grinzi reale, astfel încât constantele de integrare să fie nule sunt prezentate în Fig.2.2.3-2.

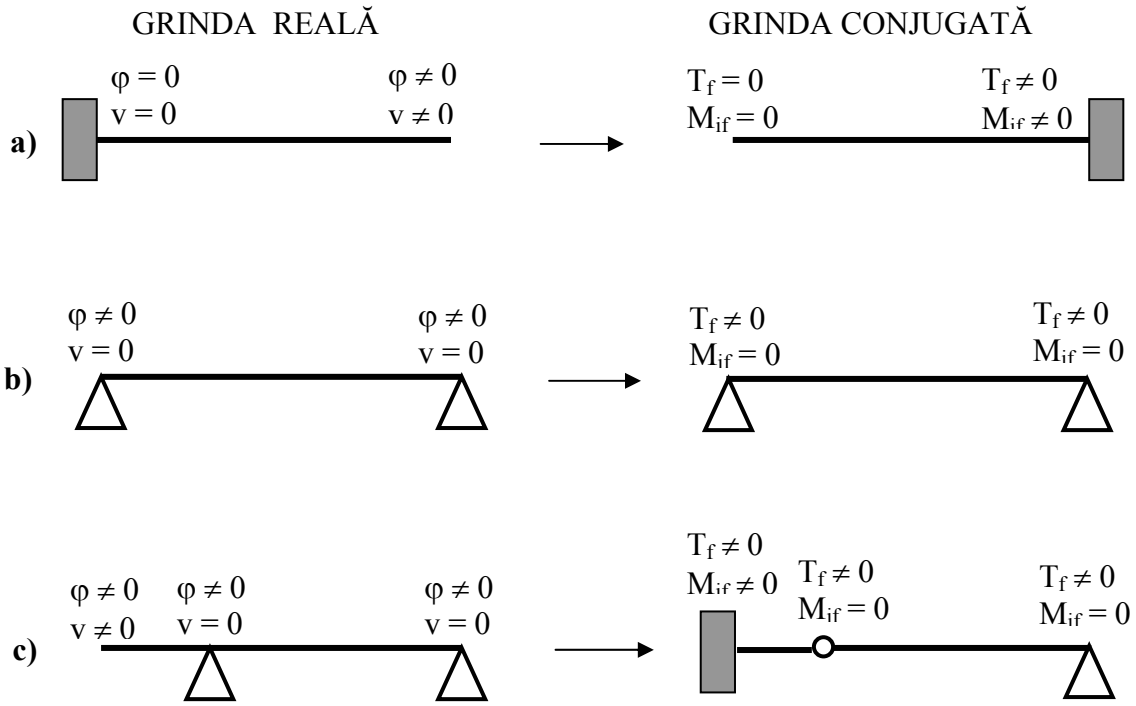


Fig.2.2.3-2

În practică se întâlnesc multe situații când barele au secțiune variabilă (momentul de inerție I_z al secțiunii transversale nu este constant în lungul barei). Metoda grinzii conjugate spre deosebire de celelalte metode care au fost prezentate, poate fi utilizată şi pentru bare cu secțiune variabilă. La calculul deplasărilor în acest caz se porneşte de la ecuația fibrei medii deformate, iar domeniile (intervalele) barei se stabilesc atât în funcție de sarcinile aplicate cât şi de variația momentului de inerție $I_z(x)$.

Aplicând metoda dublei integrări, ecuația fibrei medii deformate este:

$$E\,v'' = -\frac{M_i(x)}{I_z(x)} \qquad 2.2.3\text{-}9$$

Prin două integrări succesive se ajunge la expresia rotirii, respectiv a săgeții:

$$E\,\varphi = -\int \frac{M_i(x)}{I_z(x)}dx + C_1 \qquad 2.2.3\text{-}10a$$

$$E\,v = \int\left(-\int \frac{M_i(x)}{I_z(x)}dx\right)dx + C_1x + C_2 \qquad 2.2.3\text{-}10b$$

Se introduce acum noțiunea de *moment încovoietor redus* (M_{ired}). De asemenea, se fixează un moment de inerție I_0 față de care se efectuează convențional o reducere. Momentul de inerție I_0 este unul dintre momentele de inerție ale barei, de obicei de pe intervalul corespunzător momentului încovoietor maxim sau cea mai mică valoare a momentului de inerție de pe bară.

Expresia fibrei medii deformate (relația 2.2.3-9) se înmulțeşte cu I_0 şi rezultă:

$$EI_0\,v'' = -M_i(x)\frac{I_0}{I_z(x)} = -M_{ired} \qquad 2.2.3\text{-}11$$

Integrând de două ori relația 2.2.3-11 se obține:

$$EI_0\,\varphi = -\int M_{ired}dx + C_1 \qquad 2.2.3\text{-}12a$$

$$EI_0\,v = \int\left(-\int M_{ired}dx\right)dx + C_1x + C_2 \qquad 2.2.3\text{-}12b$$

În relațiile 2.2.3-11, 2.2.3-12a,b, M_{ired} este *momentul încovoietor redus* în raportul momentelor de inerție $I_0 / I_z(x)$:

$$M_{ired} = M_i(x)\frac{I_0}{I_z(x)} \qquad 2.2.3\text{-}13$$

Acum deplasările se calculează cu relațiile:

$$\varphi = \frac{T_f}{E\,I_0}$$
$$v = \frac{M_{if}}{E\,I_0} \qquad 2.2.3\text{-}14$$

Pentru calculul deplasărilor în cazul barelor cu secțiune variabilă, se parcurg aceleaşi etape ca şi la bara de secțiune constantă, numai că după trasarea diagramei momentului încovoietor se trasează diagrama momentului încovoietor redus M_{ired} şi grinda conjugată se încarcă cu această diagramă.

Pentru calculul deplasărilor prin metoda grinzii conjugate la barele drepte de secțiune constantă, se parcurg următoarele etape:

- se trasează diagrama de moment încovoietor pentru grinda reală (grinda dată)
- se reprezintă grinda reală fără sarcini (dar cu reazeme)
- se formează grinda conjugată a grinzii reale (vezi cazurile din Fig.2.2.3-2)
- se încarcă grinda conjugată cu diagrama momentului încovoietor al grinzii reale (s-a obținut astfel un sistem fictiv)
- pentru calculul deplasărilor într-o secțiune, de pe sistemul fictiv se determină după caz forța tăietoare fictivă (T_f) sau momentul încovoietor fictiv (M_{if}) şi se aplică relațiile 2.2.3-7 sau 2.2.3-8.

Aplicația nr.1: *Pentru grinda de rigiditate constantă din Fig.2.2.3-3 să se calculeze φ_1 şi v_4.*

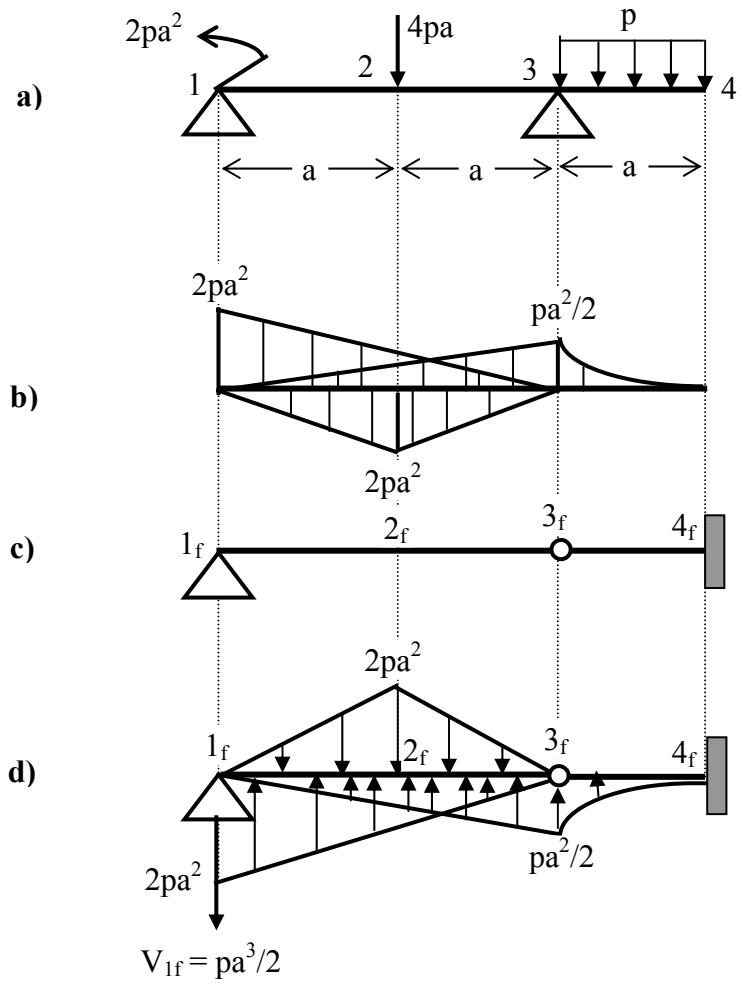


Fig.2.2.3-3

Rezolvare

Diagrama momentului încovoietor pentru grinda reală este trasată prin suprapunere de efecte şi este prezentată în Fig.2.2.3-3b.

În Fig.2.2.3-3c este prezentată grinda conjugată a grinzii reale. Grinda conjugată este încărcată cu diagrama de moment încovoietor obținându-se sistemul fictiv (Fig.2.2.3-d). Pentru calculul rotirii în secțiunea *1* (grinda reală) trebuie determinată forța tăietoare din secțiunea 1_f. Această forță tăietoare este tocmai reacțiunea V_{if} din secțiunea 1_f. După calcul se obține:

$$T_{1f} = V_{if} = \frac{pa^3}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi_1 = \frac{T_{1f}}{EI_z} = 2 \cdot \frac{p\,a^3}{E\,I_z}$$

Pentru calculul săgeții din secțiunea *4* (grinda reală) se calculează momentul încovoietor fictiv din secțiunea 4_f (M_{i4f}). Pentru exemplul studiat se obține:

$$M_{i4f} = \frac{pa^4}{8}$$

$$\Rightarrow v_4 = \frac{pa^4}{8EI_z}$$

Aplicația nr.2: *Să se calculeze rotirea şi deplasarea secțiunii 2 pentru bara de rigiditate variabilă din Fig.2.2.3-4.*

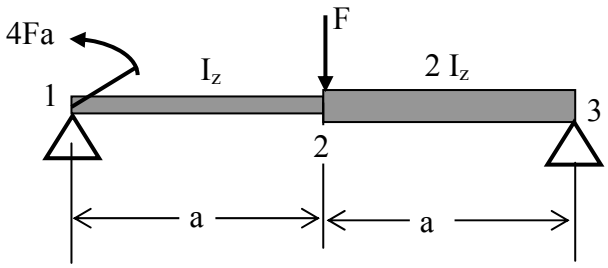
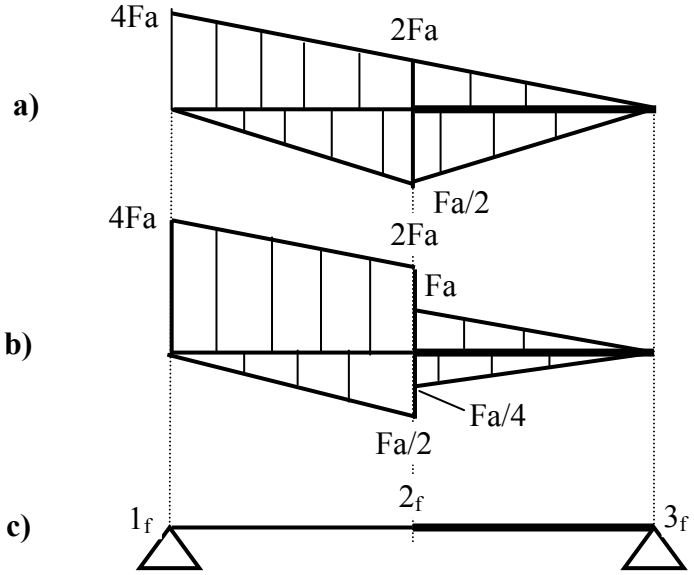


Fig.2.2.3-4

Rezolvare

Mai întâi se trasează diagrama momentului încovoietor. Şi de această dată, diagrama momentului încovoietor se trasează prin suprapunere de efecte (Fig.2.2.3-5a).



d)

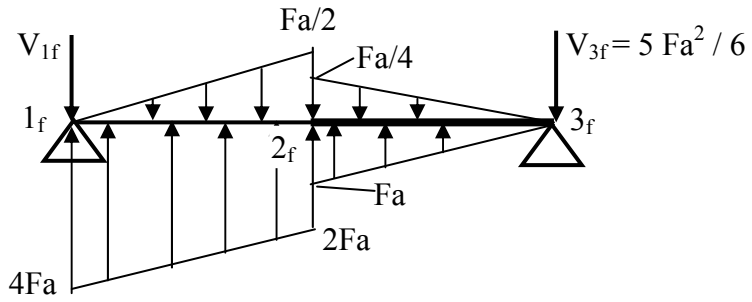


Fig.2.2.3-5

La acest tip de bară trebuie trasată diagrama de moment încovoietor redus. Momentul încovoietor redus se calculează în secțiunile caracteristice ale barei cu relația:

$$M_{ired} = M_i \frac{I_0}{I_z}$$

Pentru exemplul prezentat s-a considerat că $I_0 = I$ (momentul de inerție al primului interval, intervalul *1-2*). Înseamnă că pe acest interval diagrama reală a momentului încovoietor coincide cu cea redusă (nu se modifică), însă pe intervalul *2-3* aceasta se reduce (se micşorează). Diagrama momentului încovoietor redus M_{ired} este prezentată în Fig.2.2.3-5b. Grinda conjugată a grinzii reale este prezentată în Fig.2.2.3-5c. Grinda conjugată încărcată cu diagrama momentului încovoietor redus se prezintă în Fig.2.2.3-5d, obținându-se aşa numitul *sistem fictiv*.

Acum se pot calcula deplasările cerute. Pentru calculul acestora este nevoie de calculul cel puțin a unei reacțiuni. S-a calculat reacțiunea din reazemul 3_f (Fig.2.2.3-5d).

Forța tăietoare fictivă din secțiunea 2_f este:

$$T_{2_f} = \frac{11}{24} Fa^2 \Rightarrow \varphi_2 = \frac{T_{2_f}}{EI_0} = \frac{11}{24} \frac{Fa^2}{EI_z}$$

iar momentul încovoietor fictiv din aceeaşi secțiune este:

$$M_{i2_f} = -\frac{17}{24} Fa^3 \Rightarrow v_2 = \frac{M_{i2_f}}{EI_0} = -\frac{17}{24} \frac{Fa^3}{EI_z}$$

2.3 METODA SARCINII UNITARE (METODA MOHR-MAXWELL)

În domeniul elastic de solicitare, lucrul mecanic al forțelor exterioare este egal cu cel al forțelor interioare (eforturilor). Acest principiu este cunoscut sub numele de *principiul lui Clapeyron.*

$$L_e = L_i \qquad 2.3\text{-}1$$

unde:

$$L_e = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} F_i\, \delta_i + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{2} M_j \varphi_j \qquad 2.3\text{-}2$$

cu

F_i – forțele exterioare aplicate
M_j – momentele exterioare aplicate
δ_i – deplasările secțiunilor în care acționează forțele exterioare
φ_j – rotirile secțiunilor în care acționează momentele exterioare.

Lucrul mecanic al forțelor interioare (se neglijează efortul tăietor) este dat de expresiile deja cunoscute:

$$L_{iN} = \sum \int_0^l \frac{N^2}{2\,E\,A}\, dx \qquad 2.3\text{-}3a$$

$$L_{iM_i} = \sum \int_0^l \frac{M_i^2}{2\,E\,I_z}\, dx \qquad 2.3\text{-}3b$$

$$L_{iM_t} = \sum \int_0^l \frac{M_t^2}{2\,G\,I_p}\, dx \qquad 2.3\text{-}3c$$

Metodele de calcul care se bazează pe energia de deformație sunt *metode energetice.*

În Rezistența Materialelor se cunosc mai multe metode energetice cu ajutorul cărora se pot determina deplasările elementelor de rezistență.

Metoda sarcinii unitare sau metoda Mohr - Maxwell este una dintre aceste metode. Se va studia această metodă deoarece este o metodă relativ simplă şi se poate aplica fără restricții deosebite. Ea poate fi aplicată barelor drepte, curbe cu secțiune constantă sau variabilă.

2.3.1 Metoda Mohr – Maxwell (Metoda sarcinii unitare)

Demonstrarea acestui procedeu din metoda sarcinii unitare se face pentru o bară dreaptă solicitată la încovoiere.

Ne interesează pentru început săgeata δ produsă într-o secțiune curentă a grinzii (Fig.2.3.1-1a).

Asupra grinzii acționează un sistem de forțe transversale concentrate F_1 … F_n care în dreptul lor produc barei deplasările δ_1 … δ_n (Fig.2.3.1-1a). În acelaşi timp, datorită deformării, în grindă a luat naştere un moment încovoietor M_{iz}. Conform principiului lui Clapeyron, se poate scrie:

$$\sum \frac{1}{2} F_i \, \delta_i = \sum \int_0^l \frac{M_{iz}^2}{2E\,I_z} dx \qquad 2.3.1\text{-}1$$

Înlăturăm acum toate forțele exterioare aplicate, iar în secțiunea în care dorim să calculăm săgeata, aplicăm o forță transversală concentrată *f* (Fig.2.3.1-1b). Sub acțiunea acesteia grinda se deformează iar în aceasta se dezvoltă momentul încovoietor m_{iz}. În secțiunea în care acționează sarcina *f*, săgeata este δ'. Principiul lui Clapeyron în acest caz conduce la:

$$\frac{1}{2} f \, \delta' = \sum \int_0^l \frac{m_{iz}^2}{2E\,I_z} dx \qquad 2.3.1\text{-}2$$

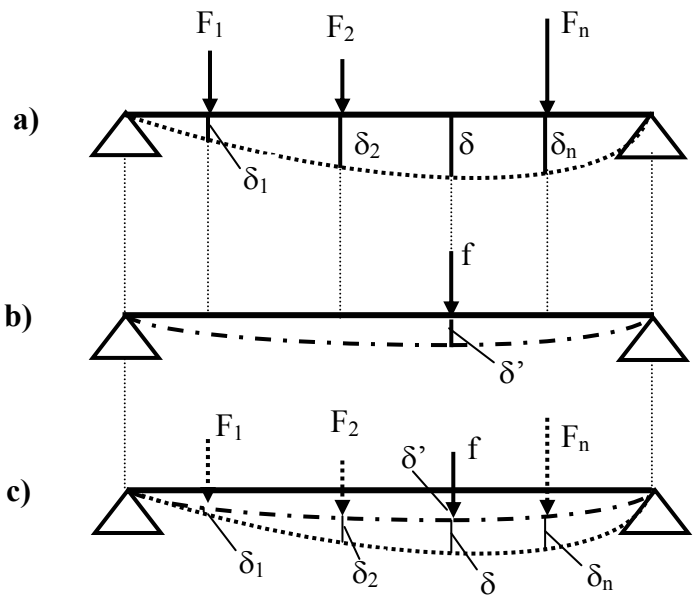


Fig.2.3.1-1

Menținând forța f pe bară (Fig.2.3.1-1c) se așează din nou sistemul de forțe F_1 … F_n situație în care în bară există momentele încovoietoare $M_{iz} + m_{iz}$. Aplicând principiul lui Clapeyron, se poate scrie:

$$\sum \frac{1}{2} F_i\, \delta_i + \frac{1}{2} f\, \delta' + f\, \delta = \sum \int_0^l \frac{(M_{iz} + m_{iz})^2}{2E\, I_z} dx \qquad 2.3.1\text{-}3$$

În relația 2.3.1-3 la termenul $f{\cdot}\delta$ nu apare $1 / 2$ deoarece forța f parcurge deplasarea δ cu întreaga sa intensitate, fiind deja pe bară când s-a aplicat sistemul de forțe exterioare.
Înlocuind termenii din stânga ai relației 2.3.1-3 în funcție de eforturi (relațiile 2.3.1-1, 2.3.1.2) se poate scrie:

$$\frac{1}{2}\sum \int_{00}^{l} \frac{M_{iz}^2}{EI_z} dx + \frac{1}{2}\sum \int_0^l \frac{m_{iz}^2}{EI_z} dx + f\,\delta = \frac{1}{2}\sum \int_0^l \frac{M_{iz}^2}{EI_z} dx + \frac{1}{2}\sum \int_0^l \frac{m_{iz}^2}{EI_z} dx + \frac{1}{2}\sum \int_0^l 2\frac{M_{iz} m_{iz}}{E\,I_z}$$

După reducerea termenilor, rezultă:

$$f\,\delta = \sum \int_0^l \frac{M_{iz}\, m_{iz}}{E\,I_z} \qquad 2.3.1\text{-}4$$

Dacă lui f i se atribuie valoarea unitară (unu), relația 2.3.1-4 conduce la relația de calcul a săgeții unei secțiuni:

$$\delta = \sum \int_0^l \frac{M_{iz}\, m_{iz}}{E\,I_z} \qquad 2.3.1\text{-}5$$

În relația 2.3.1-5:

M_{iz} – funcția momentului încovoietor pe fiecare interval, produs de forțele exterioare direct aplicate

m_{iz} – funcția momentului încovoietor pe aceleaşi intervale, dar produs de o sarcină unitară concentrată care acționează în secțiunea în care se dorește a se calcula săgeata. Această forță unitară trebuie să aibă aceeaşi direcție cu direcția pe care se calculează săgeata.

Dacă se dorește a se determina rotirea unei secțiuni la solicitarea de încovoiere se procedează analog cu observația că în secțiunea respectivă se pune un moment unitar concentrat. Atunci, rotirea secțiunii poate fi calculată cu relația:

$$\varphi = \sum \int_0^l \frac{M_{iz}\, m'_{iz}}{E\, I_z} \qquad 2.3.1\text{-}6$$

unde:

m'iz – funcția momentului încovoietor pe fiecare interval, produs de momentul unitar concentrat pus în secțiunea în care se dorește calculul rotirii.

Dacă se ține seama şi de alte eforturi, relațiile 2.3.1-5, 2.3.1-6 se completează cu termenii de la aceste eforturi:

$$\delta = \sum \frac{N\, n}{E\, A} + \sum \int_0^l \frac{M_{iz}\, m_{iz}}{E\, I_z} dx + \sum \int_0^l \frac{M_t\, m_t}{G\, I_p}$$

$$\varphi = \sum \frac{N\, n'}{E\, A} + \sum \int_0^l \frac{M_{iz}\, m'_{iz}}{E\, I_z} dx + \sum \int_0^l \frac{M_t\, m'_t}{G\, I_p} \qquad 2.3.1\text{-}7$$

unde:

N, M_t – funcțiile efortului axial, respectiv a momentului de torsiune pe fiecare interval al barei, produse de forțele exterioare direct aplicate

n, m_t – funcțiile efortului axial, respectiv ale momentului de torsiune pe fiecare interval, produse de forța unitară aşezată în secțiunea în care se calculează săgeata

n', m_t' - funcțiile efortului axial, respectiv ale momentului de torsiune pe fiecare interval, produse de momentul unitar aşezat în secțiunea în care se calculează rotirea.

Observație: Interval caracteristic este acel interval al barei pe care toate eforturile prezintă aceleaşi funcții şi rigiditatea este constantă. La stabilirea intervalelor se are în vedere şi secțiunile în care urmează a se calcula deplasările.

Exemplele care vor urma ne vor elucida mai bine aceste aspecte.

Aplicație: *Pentru bara de secțiune variabilă din Fig.2.3.1-2a să se calculeze deplasarea pe orizontală şi verticală a secțiunii 1 şi rotirea secțiunii 2.*

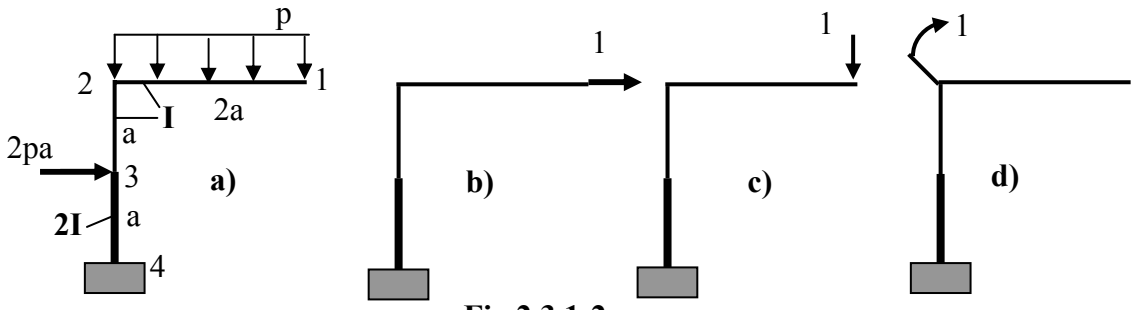


Fig.2.3.1-2

Rezolvare

Bara prezintă trei intervale: *1-2, 2-3, 3-4*. Primele două au rigiditatea la încovoiere *EI,* iar ultimul, *2EI*.

Mai întâi se scriu funcțiile momentului încovoietor produs de sarcinile aplicate, pe cele trei intervale:

- intervalul 1-2 $M_i = px^2/2$
- intervalul 2-3 $M_i = 2pa^2$
- intervalul 3-4 $M_i = 2pa^2 + 2pa\,x$

Pentru calculul deplasării pe orizontală, pe bara eliberară de sarcinile aplicate, în secțiunea *1* se pune o forță unitară orientată pe orizontală (Fig.2.3.2-2b). Pentru acest sistem se scriu funcțiile momentului încovoietor:

- intervalul *1-2* $m_{iH} = 0$
- intervalul *2-3* $m_{iH} = 1\,x = x$
- intervalul *3-4* $m_{iH} = 1\,(a + x) = a + x$

Se calculează acum deplasarea pe orizontală a secțiunii *1,* cu relația:

$$\delta_{1H} = \sum \int \frac{M_i \cdot m_{iH}}{EI_{(x)}} dx = \int_0^{2a} \frac{\frac{px^2}{2} \cdot 0}{EI} dx + \int_0^{a} \frac{2pa^2 \cdot x}{EI} dx + \int_0^{a} \frac{(2pa^2 + 2pax) \cdot (a + x)}{2EI} dx =$$

$$= \frac{10}{3} \cdot \frac{pa^4}{EI}$$

Pentru calculul deplasării secțiunii *1* pe verticală, pe bara eliberată de sarcinile aplicate, în secțiunea *1* se pune pe verticală o forță unitară (Fig.2.3.1-2c). Pentru acest sistem, se scriu funcțiile momentului încovoietor:

- intervalul *1-2* $m_{iV} = 1 \cdot x = x$
- intervalul *2-3* $m_{iV} = 1 \cdot 2a = 2a$
- intervalul *3-4* $m_{iV} = 1 \cdot 2a = 2a$

Deplasarea pe verticală a secțiunii *1*, se calculează cu relația:

$$\delta_{1V} = \sum \int \frac{M_i \cdot m_{iV}}{EI_{(x)}} dx = \int_0^{2a} \frac{\frac{px^2}{2} \cdot x}{EI} dx + \int_0^{a} \frac{2pa^2 \cdot 2a}{EI} dx + \int_0^{a} \frac{\left(2pa^2 + 2pax\right) \cdot 2a}{2EI} dx =$$

$$= \frac{9pa^4}{EI}$$

Pentru calculul rotirii secțiunii *2,* pe bara eliberată de sarcinile aplicate, în secțiunea *2* se pune un moment încovoietor unitar (Fig.2.3.1-2d). Pentru acest sistem se scriu funcțiile momentului încovoietor:

- intervalul *1-2* $m'_i = 0$
- intervalul *2-3* $m'_i = 1$
- intervalul *3-4* $m'_i = 1$

Rotirea secțiunii *2* se calculează cu relația:

$$\varphi_2 = \sum \int \frac{M_i \cdot m'_i}{EI_{(x)}} dx = \int_0^{2a} \frac{\frac{px^2}{2} \cdot 0}{EI} dx + \int_0^{a} \frac{2pa^2 \cdot 1}{EI} dx + \int_0^{a} \frac{\left(2pa^2 + 2pax\right) \cdot 1}{2EI} dx =$$

$$= \frac{7}{2} \cdot \frac{pa^3}{EI}$$

Cunoscându-se deplasarea pe orizontală şi verticală a secțiunii 1, se poate determina deplasarea totală a acestei secțiuni. Deplasarea totală se calculează cu relația:

$$\delta_{1tot} = \sqrt{\delta_{1H}^2 + \delta_{1V}^2}$$

2.3.2 Regula de integrare Vereşceaghin (procedeul Vereşceaghin)

După cum se cunoaşte, pentru determinarea deplasărilor prin metoda sarcinii unitare, trebuie efectuate integrale. Nu totdeauna, aceste integrale sunt uşor de efectuat. Din acest motiv, Vereşceaghin a dezvoltat o metodă grafo-analitică folosind însă tot metoda sarcinii unitare. Această metodă îi poartă numele. Ca urmare este mai corect să se denumească *procedeu* şi nu *metodă*, deoarece ce a stabilit el nu este o nouă metodă, metoda fiind aceea a sarcinii unitare. Din păcate acest procedeu nu la toate tipurile de bare poate fi utilizat.

Se consideră o porțiune dintr-o bară dreaptă care prezintă diagrama de moment încovoietor ca cea din Fig.2.3.2-1a. Prin înlăturarea sarcinilor direct aplicate şi punerea sarcinii unitare în secțiunea în care urmează a se determina deplasarea, pe acelaşi interval, va rezulta pentru acest sistem o variație liniară a momentului încovoietor (Fig.2.3.2-1b).

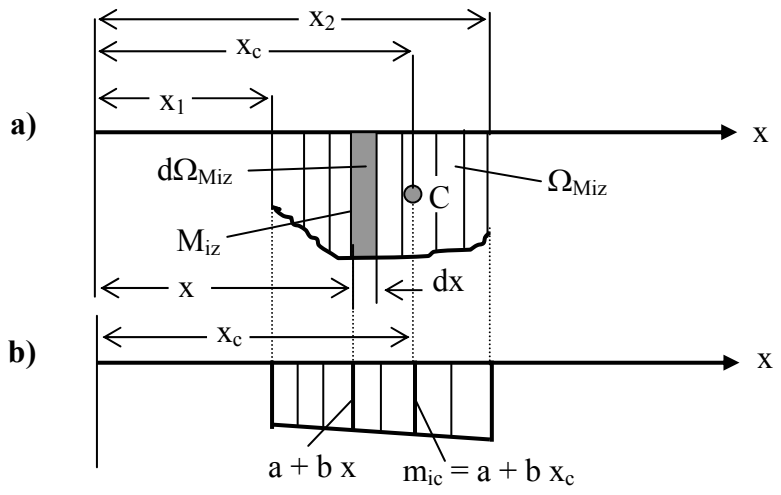


Fig.2.3.2-1

Punctul *C* reprezintă centrul de greutate al diagramei de moment încovoietor M_{iz} produs de sarcinile direct aplicate.

Integralele de tip Mohr-Maxwell folosite pentru calculul deplasărilor în metoda sarcinii unitare pot fi scrise astfel:

$$\int_{x_1}^{x_2} M_{iz}\, m_{iz}\, dx = \int_{x_1}^{x_2} m_{iz} \cdot (M_{iz}\, dx) = \int_{x_1}^{x_2} (a + b\,x) \cdot d\Omega_{M_{iz}} = a \int_{x_1}^{x_2} d\Omega_{M_{iz}} + b \int_{x_1}^{x_2} x \cdot d\Omega_{M_{iz}} =$$

$$= a\,\Omega_{M_{iz}} + b\,\Omega_{M_{iz}} \cdot x_c = \Omega_{M_{iz}} \cdot (a + b\,x_c) = \Omega_{M_{iz}} \cdot m_{ic}$$

Deci s-a obținut:

$$\int_{x_1}^{x_2} M_{iz}\, m_{iz} = \Omega_{M_{iz}} \cdot m_{ic}$$

$$\Rightarrow \quad \delta = \sum \frac{\Omega_{M_{iz}} \cdot m_{ic}}{E\, I_z} \qquad 2.3.2\text{-}1$$

În relația 2.3.2-1:

Ω_{Miz} – aria diagramei de moment încovoietor produs de sarcinile direct aplicate

m_{ic} – valoarea momentului încovoietor produs de forța unitară, din secțiunea corespunzătoare centrului de greutate C al diagramei momentului încovoietor al sarcinilor direct aplicate (al suprafeței Ω_{Miz})

Analog, rotirea se poate determina cu relația:

$$\int_{x_1}^{x_2} M_{iz}\, m'_{iz} = \Omega_{M_{iz}} \cdot m'_{ic}$$

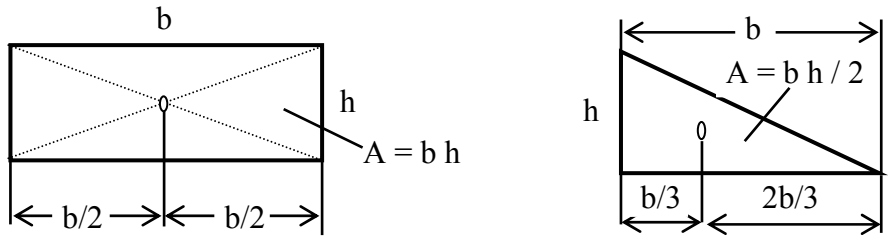
$$\Rightarrow \quad \varphi = \sum \frac{\Omega_{M_{iz}} \cdot m'_{ic}}{E\, I_z} \qquad 2.3.2\text{-}2$$

unde:

m'_{ic} - valoarea momentului încovoietor produs de momentul unitar, din secțiunea corespunzătoare centrului de greutate C al diagramei momentului încovoietor al sarcinilor direct aplicate (al suprafeței Ω_{Miz})

Observație. După cum se poate constata, în acest procedeu nu se mai rezolvă integrale, în schimb se trasează diagrame de eforturi. La suprafețele diagramelor de eforturi trebuie cunoscută aria şi poziția centrului de greutate al acestor suprafețe. Din aceste considerente, este recomandat ca diagramele de eforturi să fie trasate prin suprapunere de efecte, astfel se obțin suprafețe simple la care se cunoaşte aria şi poziția centrului de greutate.

În Fig.2.3.2-2, se prezintă câteva suprafețe des întâlnite în calculul deplasărilor, cu relația ariei şi poziția centrului de greutate.



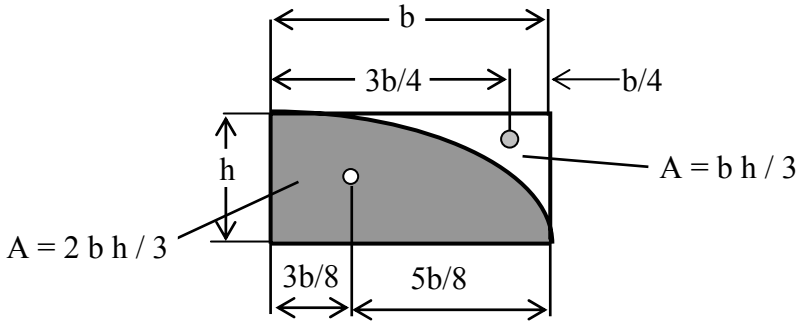


Fig.2.3.2-2

Procedeul Vereşceaghin se poate utiliza numai pe intervalele drepte ale barei.

Aplicație: *Pentru bara cotită de rigiditate constantă, din Fig.2.3.2-3, aplicând procedeul Vereşceaghin, se cere:*

a) deplasarea pe verticală şi orizontală a secțiunii 1

b) rotirea secțiunii 1

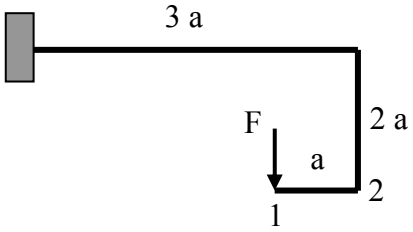


Fig.2.3.2-3

Rezolvare

Pentru calculul deplasărilor, procedeul Vereşceaghin, impune trasarea diagramelor de eforturi ale sarcinilor direct aplicate. Şi în acest caz se va lua în considerare numai momentele. Pentru acest exemplu, moment de torsiune nu există. Diagrama momentului încovoietor al forței aplicate este prezentată în Fig.2.3.2-4a.

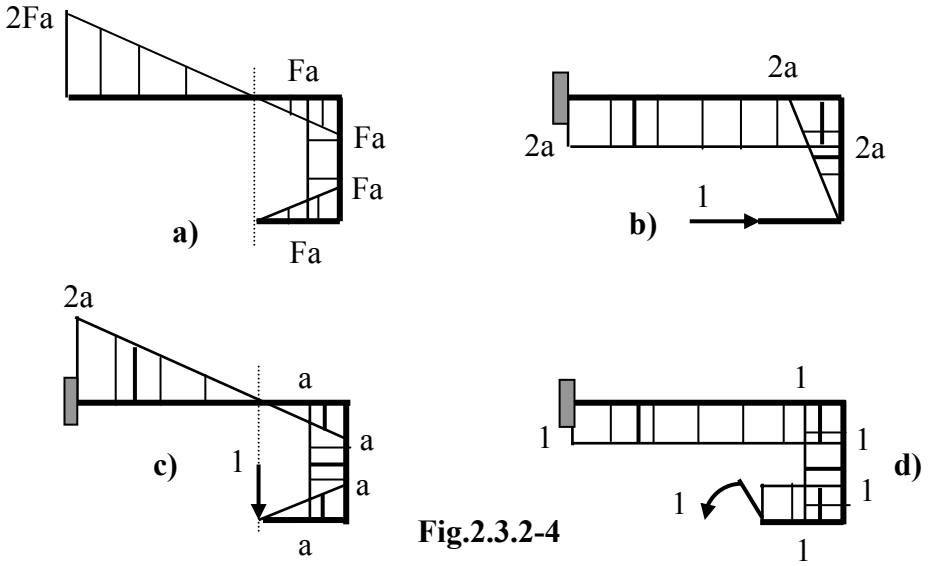


Fig.2.3.2-4

Pentru calculul deplasării secțiunii *1* pe orizontală, în secțiunea *1* se pune o forță unitară pe orizontală şi se trasează diagrama momentului încovoietor (Fig.2.3.2-4b). Cu diagramele din Fig.2.3.2-4a de unde se ia suprafața Ω şi cele din Fig.2.3.2-4b de unde se ia momentul m_{ic} din secțiunea corespunzătoare centrului de greutate al suprafeței Ω, se calculează deplasarea pe orizontală a secțiunii *1*:

$$EI\,\delta_{1H} = \frac{1}{2}Fa\cdot a\cdot 0 + Fa\cdot 2a\cdot\frac{2a}{2} + \frac{1}{2}Fa\cdot a\cdot 2a - \frac{1}{2}2Fa\cdot 2a\cdot 2a = -Fa^3$$

$$\Rightarrow\ \delta_{1H} = -\frac{Fa^3}{EI}$$

Pentru calcul deplasării secțiunii *1* pe verticală, în secțiunea 1 se pune o forță unitară pe verticală şi se trasează diagrama momentului încovoietor (Fig.2.3.2-4c). Cu diagramele din Fig.2.3.2-4a de unde se ia suprafața Ω şi cele din Fig.2.3.2-4c de unde se ia momentul m_{ic} din secțiunea corespunzătoare centrului de greutate al suprafeței Ω, se calculează deplasarea pe verticală a secțiunii *1*:

$$EI\,\delta_{1V} = \frac{1}{2}Fa\cdot a\cdot\frac{2}{3}a + Fa\cdot 2a\cdot a + \frac{1}{2}Fa\cdot a\cdot\frac{2}{3}a + \frac{1}{2}2Fa\cdot 2a\cdot\frac{2}{3}2a = \frac{16}{3}Fa^3$$

$$\Rightarrow\ \delta_{1V} = \frac{16}{3}\cdot\frac{Fa^3}{EI}$$

Pentru calcul rotirii secțiunii *1*, în secțiunea *1* se pune un moment unitar şi se trasează diagrama momentului încovoietor (Fig.2.3.2-4d). Cu diagramele din Fig.2.3.2-4a de unde se ia suprafața Ω şi cele din Fig.2.3.2-4d de unde se ia momentul m'_{ic} din secțiunea corespunzătoare centrului de greutate al suprafeței Ω, se calculează rotirea secțiunii *1*:

$$EI\,\varphi_1 = \frac{1}{2}Fa\cdot a\cdot 1 + Fa\cdot 2a\cdot 1 + \frac{1}{2}Fa\cdot a\cdot 1 - \frac{1}{2}2Fa\cdot 2a\cdot 1 = Fa^2$$

$$\Rightarrow\ \varphi_1 = \frac{Fa^2}{EI}$$

Observație: Pe intervalele unde diagramele momentului încovoietor al sarcinilor direct aplicate şi cel al sarcinilor unitare sunt pe părți opuse, produsul $\Omega_{Mi}\ m_{ic}$ este negativ (are semnul -). În diagramele sarcinilor unitare, momentele m_{ic}, respectiv m'_{ic} sunt îngroşate.

2.4. SISTEME STATIC NEDETERMINATE

Un sistem este *static nedeterminat* atunci când numărul necunoscutelor (reacțiuni şi eforturi) este mai mare decât numărul ecuațiilor de echilibru care se pot scrie pentru acel sistem. Diferența dintre numărul necunoscutelor şi cel al ecuațiilor de echilibru indică *gradul de nedeterminare (n)* al sistemului. Când necunoscutele sunt reacțiuni (Fig.2.4-1a) sistemul este *static nedeterminat exterior,* când necunoscutele sunt eforturi (Fig.2.4-2b) sistemul este *static nedeterminat interior,* iar când necunoscutele sunt atât reacțiuni cât şi eforturi (Fig.2.4-1c) sistemul este *static nedeterminat exterior şi interior* (3 ori interior şi o dată exterior).

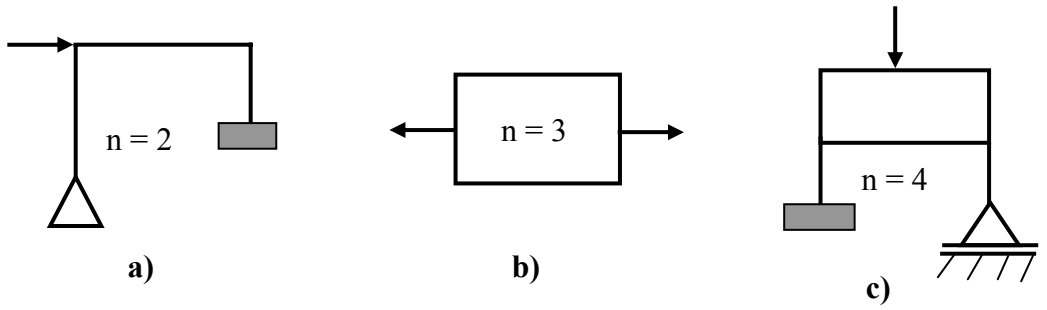


Fig.2.4-1

O articulație micşorează gradul de nedeterminare cu o unitate. Dacă într-o articulație se întâlnesc trei bare, gradul de nedeterminare scade cu două unități. În general, dacă într-o articulație se întâlnesc *s* bare, față de cele cunoscute, gradul de nedeterminare scade cu *s –1* unități.

Se considerăm un sistem static nedeterminat de *n* ori. Înlăturând de pe sistemul real (static nedeterminat) toate sarcinile aplicate şi legăturile suplimentare (numărul lor este egal cu gradul de nedeterminare) se obține aşa numitul *sistem de bază (SB).* Dacă de pe sistemul real se înlătură numai legăturile suplimentare, şi acestea se înlocuiesc cu forțele corespunzătoare legăturilor înlăturate, se obține un *sistem echivalent (SE).* Desigur, acest sistem este echivalent cu cel real, numai dacă deplasările sistemului obținut prin înlocuirea legăturilor suplimentare cu forțele corespunzătoare sunt aceleaşi cu cele ale sistemului real (static nedeterminat). Aşadar, în locul legăturilor suplimentare şi înlăturate, trebuie introduse forțe de legătură sau eforturi (după caz) care să aibă o astfel de valoare încât împreună cu sarcinile direct aplicate să producă sistemului aceleaşi deplasări (liniare sau rotații) ca în cazul sistemului static nedeterminat (sistemul real). În general, aceste deplasări sunt nule.

La început se încarcă sistemul de bază (care este un sistem static determinat şi neîncărcat) numai cu sarcinile direct aplicate. În secțiunile unde s-

au înlăturat legături, se produc deplasările: δ_{10}, δ_{20} … δ_{n0}. Încărcând acum (pe rând) sistemul de bază cu forțele de legătură X_1, X_2, … X_n , acestea vor produce în secțiunile respective deplasările δ_{iX1}, δ_{iX2} … δ_{iXn}. Suma deplasărilor forțelor direct aplicate şi a celor de legătură trebuie să fie nulă:

$$\begin{aligned}
&\delta_{10} + \delta_{1X_1} + \delta_{1X_2} + \ldots + \delta_{1X_n} = 0 \\
&\delta_{20} + \delta_{2X_1} + \delta_{2X_2} + \ldots + \delta_{2X_n} = 0 \\
&. \\
&. \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2.4\text{-}1 \\
&. \\
&\delta_{n0} + \delta_{nX_1} + \delta_{nX_2} + \ldots + \delta_{nX_n} = 0
\end{aligned}$$

Dacă se aplică nu forțe X_i ci forțe unitare şi cunoscând că deplasările sunt proporționale cu forțele unitare (sau cupluri unitare) aplicate:

$$\delta_{iX_j} = \delta_{ij}\, X_j \qquad 2.4\text{-}2$$

sistemul de ecuații (relațiile 2.4-1) se poate scrie sub forma:

$$\begin{aligned}
&\delta_{10} + \delta_{11}\, X_1 + \delta_{12}\, X_2 + \ldots + \delta_{1n}\, X_n = 0 \\
&\delta_{20} + \delta_{21}\, X_1 + \delta_{22}\, X_2 + \ldots + \delta_{2n}\, X_n = 0 \\
&. \\
&. \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 2.4\text{-}3 \\
&. \\
&\delta_{n0} + \delta_{n1}\, X_1 + \delta_{n2}\, X_2 + \ldots + \delta_{nn}\, X_n = 0
\end{aligned}$$

unde:

δ_{ij} – deplasarea pe direcția *i* produsă de forța unitară ce acționează pe direcția *j*

$\delta_{i\,0}$ – deplasarea pe direcția *i* produsă de sarcinile direct aplicate.

Sistemul de ecuații (relațiile 2.4-4) reprezintă sistemul de *ecuații canonice* pentru sistemul static nedeterminat. Rezolvând acest sistem de ecuații, se determină forțele de legătură suplimentare ale sistemului static nedeterminat.

Pentru determinarea coeficienților sistemului de ecuații canonice (care sunt deplasări) se recomandă parcurgerea următoarelor etape:

- se stabileşte gradul de nedeterminare *n* al sistemului real (SR)
- se stabileşte tipul nedeterminării statice: exterior, interior sau interior-exterior
  Pentru calculul deplasărilor se procedează în felul următor:
- din SR se formează sistemul echivalent SE, cel mai convenabil
- din SE se formează sistemul de bază SB
- corespunzător gradului de nedeterminare, se scrie sistemul de ecuații canonice (relațiile 2.4-3) Pentru cazul când $n = 3$, sistemul de ecuații canonice (de condiție) este de forma:

$$\delta_{10} + \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 = 0$$
$$\delta_{20} + \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 = 0$$
$$\delta_{30} + \delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 = 0$$

- se ia *SB* şi se încarcă pe rând:
  - mai întâi cu sarcinile direct aplicate şi în funcție de procedeul ales (Mohr-Maxwell sau Vereşceaghin) se scriu funcțiile de eforturi sau se trasează diagramele de eforturi, care se notează cu N_0, M_{i0}, M_{t0}
  - cu necunoscutele $X_1 = 1$, $X_2 = 1$ ... $X_n = 1$ şi pentru fiecare astfel de încărcare, funcție de procedeul ales, se scriu funcțiile de eforturi sau se trasează diagramele de eforturi, care se notează cu: (n_1, m_{i1}, m_{t1}), (n_2, m_{i2}, m_{t2}) … (n_n, m_{in}, m_{tn})
  - cu N_0, M_{i0}, M_{t0} şi (n_1, m_{i1}, m_{t1}), (n_2, m_{i2}, m_{t2}) … (n_n, m_{in}, m_{tn}) se calculează coeficienții sistemului de ecuații canonice. Indicii *i0, ij* ai acestor coeficienți indică şi funcțiile sau diagramele care se utilizează pentru calculul coeficienților
- cunoscându-se coeficienții sistemului, acesta se rezolvă şi se obțin necunoscutele X_1, X_2, ... X_n
- pe *SE* se înlocuiesc necunoscutele X_1, X_2, ... X_n cu valorile şi sensurile lor reale, obținându-se astfel un sistem static determinat
- pentru sistemul static determinat astfel obținut, se pot efectua calcule de rezistență sau de deplasări

Rezolvarea unui sistem cu un grad mare de nedeterminare, este o operație dificilă, datorită atât unui număr mare de coeficienți (deplasări) cât şi rezolvării unui sistem liniar care conține un număr mare de ecuații. În aplicațiile practice din construcția de maşini, se întâlnesc sisteme de bare cu un grad mare de nedeterminare. De multe ori acestea prezintă simetrii, care încă de la început, permit determinarea sau cunoaşterea unor necunoscute, fie că ele sunt nule, fie că sunt egale pe perechi. Cunoaşterea acestor necunoscute reduce numărul ecuațiilor canonice şi simplifică mult calculul. Astfel pentru un element de rezistență plan şi simetric:

- *încărcat simetric,* în secțiunile cuprinse în planul de simetrie se cunoaşte efortul tăietor. Dacă în secțiunile din planul de simetrie nu există forțe

tăietoare (transversale) concentrate, în aceste secțiuni, efortul tăietor este nul Fig.2.4-2a), iar dacă există o forță tăietoare concentrată, atunci aceasta se distribuie pe cele două fețe ale secțiunii, în mod egal (Fig.2.4-2b). Pentru elementele de rezistență simetrice încărcate simetric, efortul axial şi momentul încovoietor sunt simetrice, iar efortul tăietor este antisimetric.

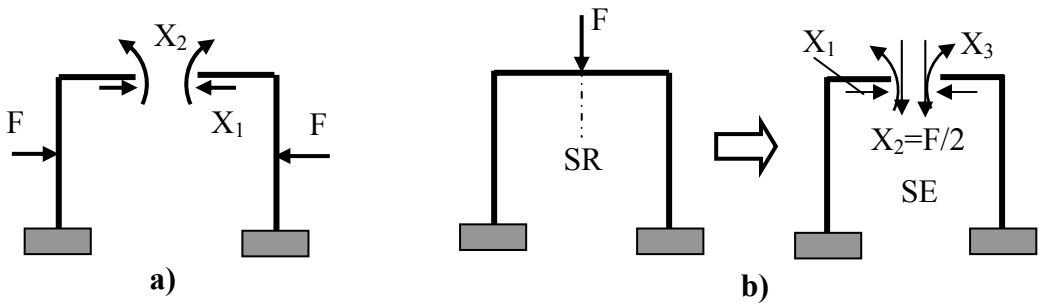


Fig.2.4-2

- *încărcat antisimetric,* în secțiunile cuprinse în planul de simetrie, se cunosc efortul axial şi încovoietor. Dacă în aceste secțiuni nu există aplicate forță axială sau moment încovoietor, în aceste secțiuni efortul axial şi cel încovoietor sunt nule (Fig.2.4-3). Dacă însă în aceste secțiuni există forțe axiale sau momente concentrate, efortul axial şi momentul încovoietor din aceste secțiuni se distribuie pe cele două fețe ale secțiunii din planul de simetrie, în mod egal. Pentru sistemele simetrice încărcate antisimetric diagrama efortului axial şi a momentului încovoietor sunt antisimetrice, iar a forței tăietoare este simetrică.

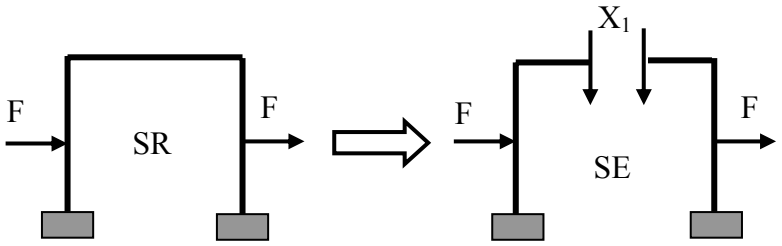


Fig.2.4-3

Sistemele simetrice încărcate simetric sau antisimetric prezintă şi avantajul că se poate considera numai jumătate din sistem. La sistemele dublu simetrice, calculul se simplifică şi mai mult.

2.5 APLICAȚII

Aplicația 2.5.1. *Să se ridice nedeterminarea statică pentru bara de rigiditate constantă din Fig.2.5.1-1.*

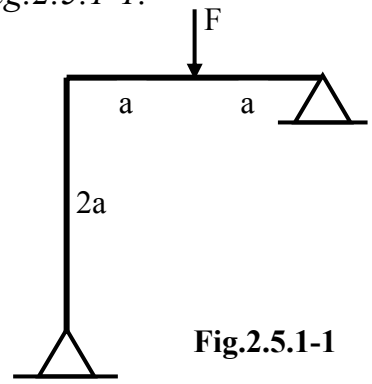


Fig.2.5.1-1

Rezolvare

Sistemul are *4* reacțiuni şi fiind plan se pot scrie *3* ecuații de echilibru. Rezultă că sistemul este o dată static nedeterminat exterior (legătura suplimentară este o forță de legătură). O variantă a sistemului echivalent *SE* este prezentată în Fig.2.5.1-2a, iar sistemul de bază *SB* se prezintă în Fig.2.5.1-2b.

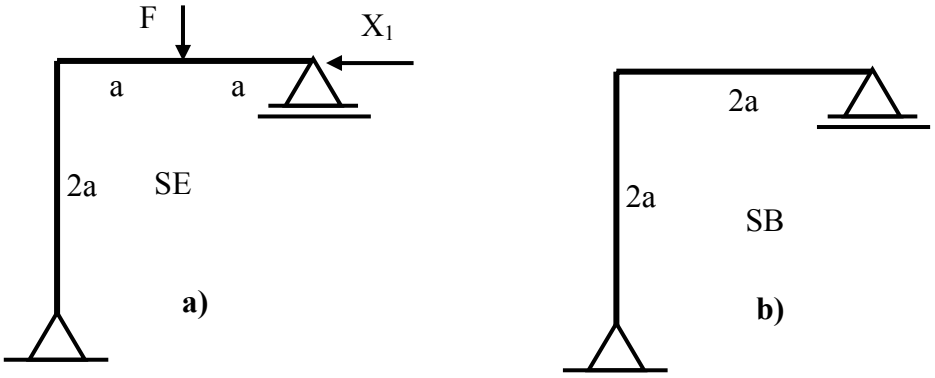


Fig.2.5.1-2

Sistemul de ecuații canonice pentru acest caz conține o singură ecuație:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{10} = 0$$

$$\Rightarrow X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}$$

Pentru calculul coeficienților acestei ecuații se procedează astfel:

- sistemul de bază *SB* se încarcă cu sarcinile direct aplicate şi se trasează diagrama de momente încovoietoare, notată cu M_0 (s-a optat pentru procedeul Vereşceaghin). Se obține sistemul din Fig.2.5.1-3a
- sistemul de bază *SB* se încarcă cu necunoscuta $X_1 = 1$ şi se trasează diagrama momentului încovoietor m_1 (Fig.2.5.1-3b)

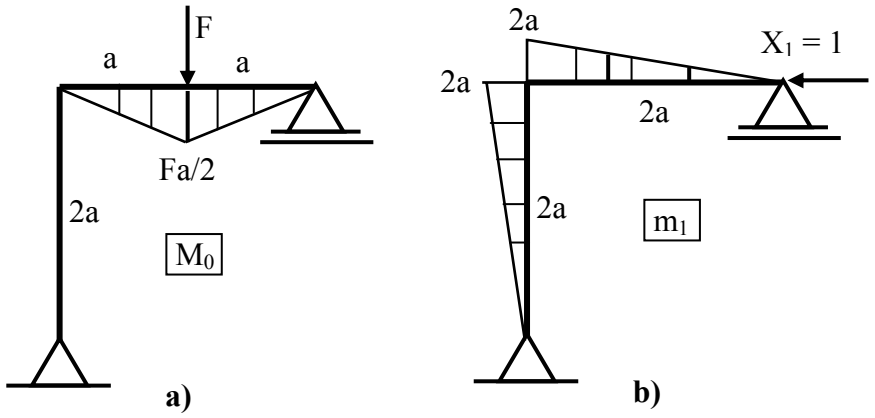


Fig.2.5.1-3

- se calculează coeficienții sistemului de ecuații canonice. Pentru δ_{10} se lucrează cu diagrama M_0 (de unde se ia suprafața Ω) şi cu diagrama m_1 de unde se ia valoarea m_{ic}

$$EI_z\,\delta_{10} = -\frac{1}{2}\frac{Fa}{2}\cdot a\cdot\frac{2}{3}a - \frac{1}{2}\frac{Fa}{2}\cdot a\cdot\left(a+\frac{1}{3}a\right) = -\frac{Fa^3}{2}$$

$$\Rightarrow\ \delta_{10} = -\frac{Fa^3}{2EI_z}$$

$$EI_z\,\delta_{11} = \frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2a\cdot\frac{2}{3}2a + \frac{1}{2}\cdot 2a\cdot 2a\cdot\frac{2}{3}2a = \frac{16}{3}a^3$$

$$\Rightarrow\ \delta_{11} = \frac{16}{3}a^3$$

Cu valorile determinate pentru coeficienți, rezultă valoarea necunoscutei:

$$X_1 = \frac{3}{32}F$$

Sistemul static determinat rezultat, este prezentat în Fig.2.5.1-4.

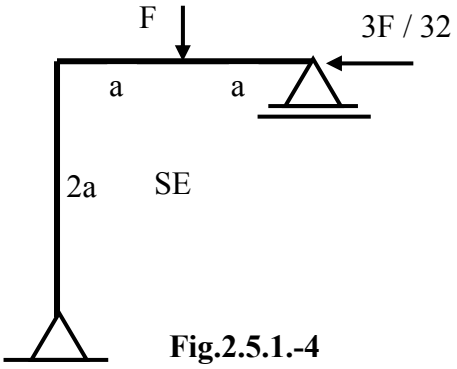


Fig.2.5.1.-4

Pentru acest sistem se poate efectua acum calculul de rezistență sau de deplasări, după regulile cunoscute.

Aplicația2.5.2. *Să se ridice nedeterminarea pentru bara de rigiditate constantă din Fig. 2.5.2-1.*

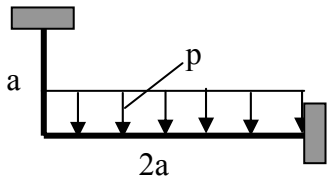


Fig.2.5.2-1

Rezolvare

Sistemul este de *3* ori static nedeterminat exterior (*6* reacțiuni şi *3* ecuații de echilibru). Sistemul echivalent *SE* şi cel de bază *SB* sunt prezentate în Fig.2.5.2-2a,b.

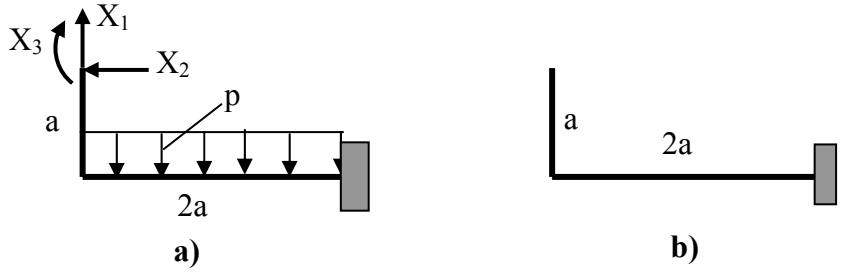
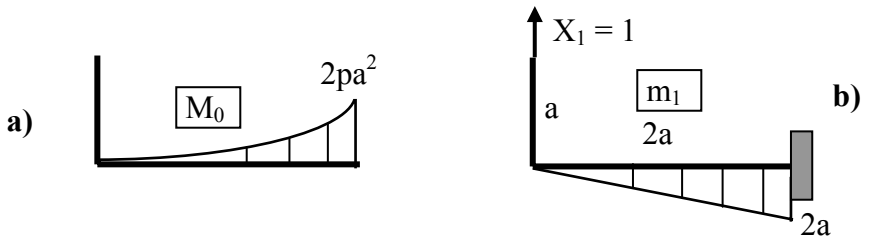


Fig.2.5.2-2

Sistemul de ecuații canonice corespunzător gradului trei de nedeterminare este:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \delta_{10} = 0$$
$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \delta_{20} = 0$$
$$\delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 + \delta_{30} = 0$$

Pentru calculul coeficienților sistemului, se trasează diagramele momentului încovoietor pentru sistemul de bază încărcat cu sarcina distribuită (Fig.2.5.2-3a) şi cu necunoscutele $X_1 = 1$, $X_2 = 1$, $X_3 = 1$ (Fig.2.5.2-3b,c,d).



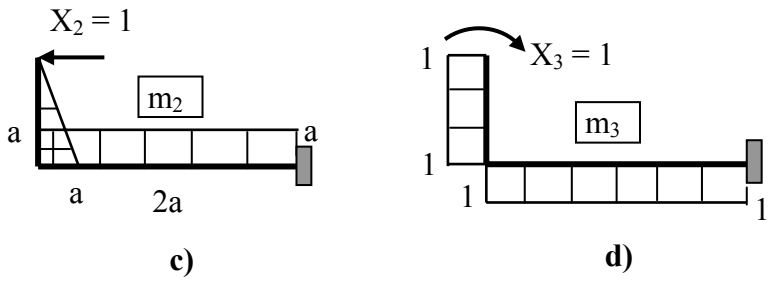


Fig.2.5.2-3

Cu notațiile din Fig.2.5.2-3 ale diagramelor momentului încovoietor, indicii coeficienților sistemului de ecuații canonice, indicând diagramele cu care se lucrează, se obține:

$$EI\,\delta_{10} = -\frac{1}{3}2pa^2 \cdot 2a \cdot \frac{3}{4}2a = -2pa^2$$

$$EI\,\delta_{20} = \frac{1}{3}2pa^2 \cdot 2a \cdot a = \frac{4}{3}pa^4$$

$$EI\,\delta_{30} = -\frac{1}{3}2pa^2 \cdot 2a \cdot 1 = -\frac{4}{3}pa^3$$

$$EI\,\delta_{11} = \frac{1}{2}2a \cdot 2a \cdot \frac{2}{3}2a = \frac{8}{3}a^3$$

$$EI\,\delta_{12} = EI\,\delta_{21} = -\frac{1}{2}2a \cdot 2a \cdot a = -2a^3$$

$$EI\,\delta_{22} = \frac{1}{2}a \cdot a \cdot \frac{2}{3}a + a \cdot 2a \cdot a = \frac{7}{3}a^3$$

$$EI\,\delta_{13} = EI\,\delta_{31} = \frac{1}{2}2a \cdot 2a \cdot 1 = 2a^2$$

$$EI\,\delta_{23} = EI\,\delta_{32} = -\frac{1}{2}a \cdot a \cdot 1 - a \cdot 2a \cdot 1 = -\frac{5}{2}a^2$$

$$EI\,\delta_{33} = a \cdot 1 \cdot 1 + 2a \cdot 1 \cdot 1 = 3a^2$$

Coeficienții sistemului de ecuații canonice fiind determinați, se poate calcula mărimea necunoscutelor. Se obțin valorile:

$$X_1 = \frac{11}{12}pa \qquad X_2 = \frac{1}{3}pa \qquad X_3 = \frac{1}{9}pa$$

Sistemul static determinat este prezentat în Fig.2.5.2-4, care poate fi calculat mai departe.

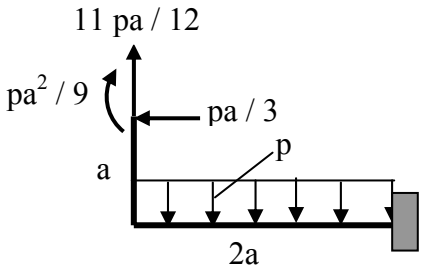


Fig.2.5.2-4

Aplicația 2.5.3. *Să se ridice nedeterminarea pentru cadrul de rigiditate constantă din Fig.2.5.3-1.*

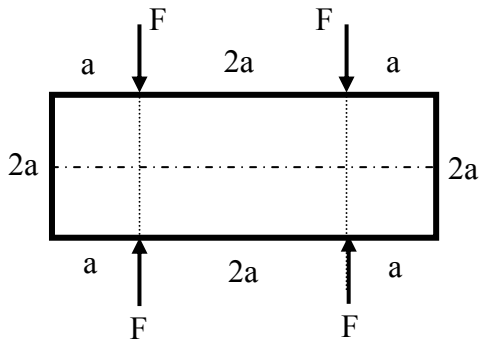


Fig.2.5.3-1

Rezolvare

Sistemul este static nedeterminat interior de trei ori, dar este simetric, încărcat simetric. Înseamnă că în secțiunile cuprinse în axa de simetrie se cunoaşte mărimea efortului tăietor. Pentru cadrul nostru, în aceste secțiuni efortul tăietor este nul (nu există forță tăietoare concentrată în aceste secțiuni). Sistemul echivalent şi cel de bază sunt prezentate în Fig.2.5.3-2a,b.

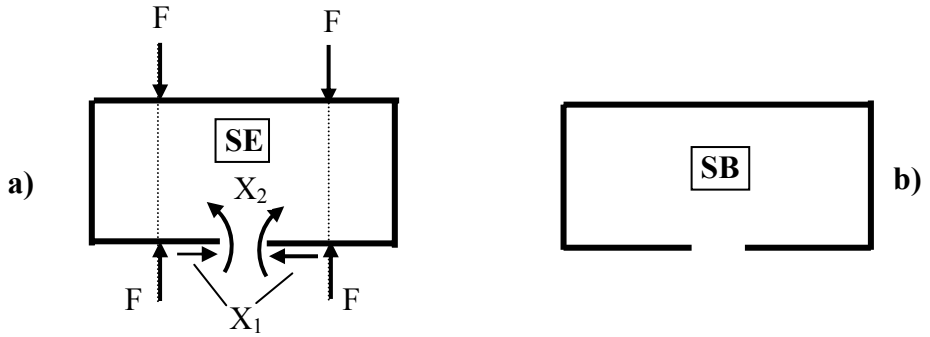


Fig.2.5.3-2

Sistemul de ecuații canonice pentru acest sistem (sunt numai două necunoscute) este:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{10} = 0$$
$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{20} = 0$$

Pentru determinarea coeficienților, se trasează diagramele momentului încovoietor pentru sistemul de bază încărcat cu forțele aplicate (Fig.2.5.3-3a), respectiv pentru necunoscutele $X_1 = 1$, $X_2 = 1$ (Fig.2.5.3-3b,c). Se utilizează numai o jumătate din sistemul de bază.

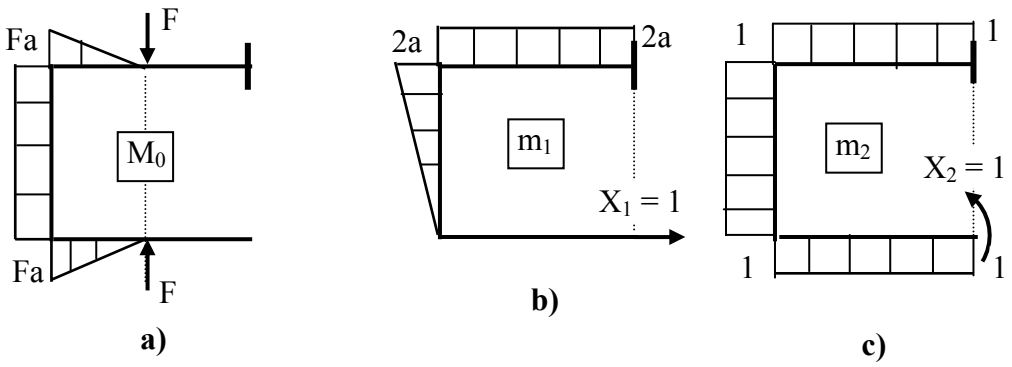


Fig.2.5.3-3

Cu diagramele din Fig.2.5.3-3, se pot determina coeficienții sistemului de ecuații canonice:

$$EI\,\delta_{10} = Fa \cdot 2a \cdot a + \frac{1}{2} Fa \cdot a \cdot 2a \cdot 2 = 4Fa^3$$
$$EI\,\delta_{20} = \frac{1}{2} Fa \cdot a \cdot 1 + Fa \cdot 2a \cdot 1 + \frac{1}{2} Fa \cdot a \cdot 1 = 3Fa^2$$
$$\mathrm{EI}\,\delta_{11} = \frac{1}{2} \cdot 2\mathrm{a} \cdot 2\mathrm{a} \cdot \frac{2}{3} 2\mathrm{a} + 2\mathrm{a} \cdot 2\mathrm{a} \cdot 2\mathrm{a} = \frac{32}{3} \mathrm{a}^3$$
$$\mathrm{EI}\,\delta_{12} = \mathrm{EI}\,\delta_{21} = \frac{1}{2} 2\mathrm{a} \cdot 2\mathrm{a} \cdot 1 + 2\mathrm{a} \cdot 2\mathrm{a} \cdot 1 = 6\,\mathrm{a}^2$$
$$\mathrm{EI}\,\delta_{22} = 1 \cdot 2\mathrm{a} \cdot 1 + 1 \cdot 2\mathrm{a} \cdot 1 + 1 \cdot 2\mathrm{a} \cdot 1 = 6\,\mathrm{a}$$

După rezolvarea sistemului de ecuații canonice, se obține:

$$X_1 = 0 \qquad X_2 = -\frac{\mathrm{F\,a}}{2}$$

Valoarea nulă a efortului axial din secțiunea situată pe axa de simetrie (cea considerată) putea fi anticipată.

Sistemul static determinat are acum forma (Fig.2.5.3-4):

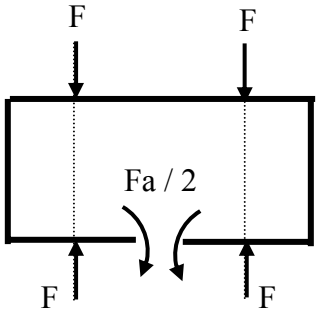


Fig.2.5.3-4

Aplicația 2.5.4. *Pentru cadrul de rigiditate constantă din Fig.2.5.4 -1 se cere să se ridice nedeterminarea statică.*

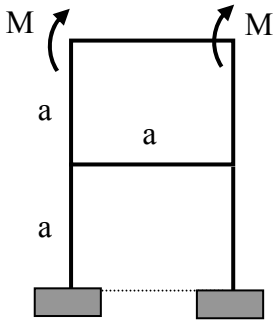


Fig.2.5.4-1

Rezolvare

Cadrul este static nedeterminat de 6 ori (*3* exterior şi *3* interior). Fiecare contur plan închis introduce trei necunoscute (eforturi). După cum se observă, sistemul analizat este simetric încărcat antisimetric. În secțiunile cuprinse în planul de simetrie se cunosc efortul axial şi momentul încovoietor. În acest caz, ele sunt nule. Se va considera numai o jumătate de cadru. Sistemul echivalent *SE* şi sistemul de bază *SB* utilizate sunt prezentate în Fig.2.5.4-2a,b.

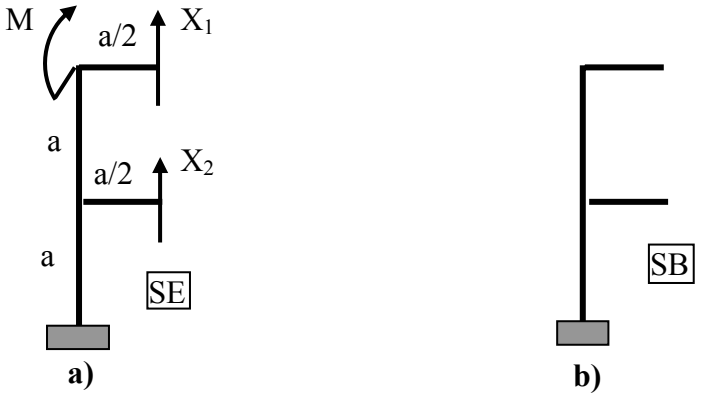


Fig.2.5.4-2

Sistemul de ecuații canonice pentru gradul doi de nedeterminare este:

$$\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{10} = 0$$
$$\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{20} = 0$$

Diagramele sarcinilor aplicate şi a celor unitare se prezintă în Fig.2.5.4-3.

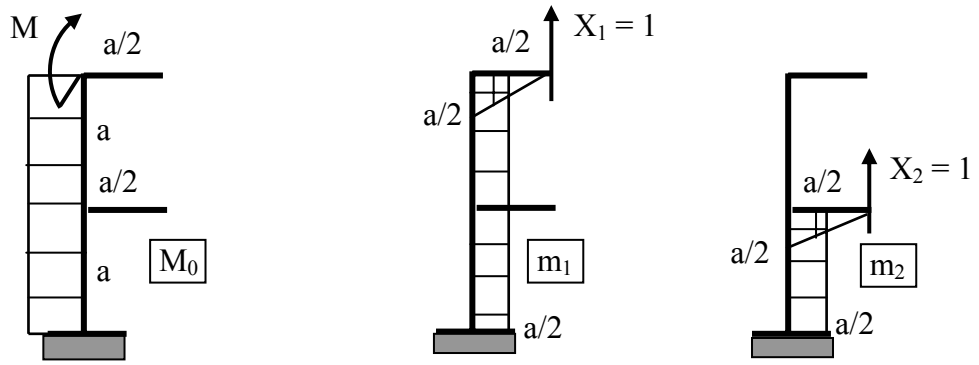


Fig.2.5.4-3

Cu diagramele din Fig.2.5.4-3 se determină coeficienții sistemului de ecuații canonice.

$$EI\,\delta_{10} = -M \cdot 2a \cdot \frac{a}{2} = -M\,a^2$$
$$EI\,\delta_{20} = -M \cdot a \cdot \frac{a}{2} = -\frac{M\,a^2}{2}$$

$$EI\,\delta_{11} = \frac{1}{2}\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{3}\frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cdot 2a \cdot \frac{a}{2} = \frac{13}{24} a^3$$
$$EI\,\delta_{12} = EI\,\delta_{21} = \frac{a}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{4}$$
$$EI\,\delta_{22} = \frac{1}{2}\frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{3}\frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cdot a \cdot \frac{a}{2} = \frac{7}{24} a^3$$

Cu aceste valori determinate pentru coeficienții sistemului de ecuații de condiție şi după rezolvarea acestuia, pentru necunoscutele X_1 şi X_2 se obțin valorile:

$$X_1 = 1{,}745 \frac{M}{a} \qquad X_2 = 0{,}218 \frac{M}{a}$$

Sistemul static determinat rezultat este prezentat în Fig.2.5.4-4.

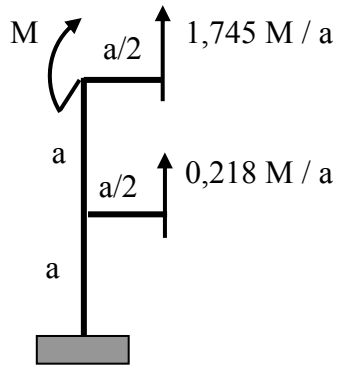


Fig.2.5.4-4

Este destul de uşor de trasat acum diagramele de eforturi pentru întreg cadrul. Se trasează mai întâi pentru o jumătate de cadru. Pentru cealaltă jumătate se trasează prin simetrie, respectiv antisimetrie. Se ştie că la un sistem simetric încărcat antisimetric, efortul tăietor este simetric, iar efortul axial şi momentul încovoietor sunt antisimetrice.

Diagramele de eforturi pentru cadrul din Fig.2.5.4-1 sunt prezentate în Fig.2.5.4-5.

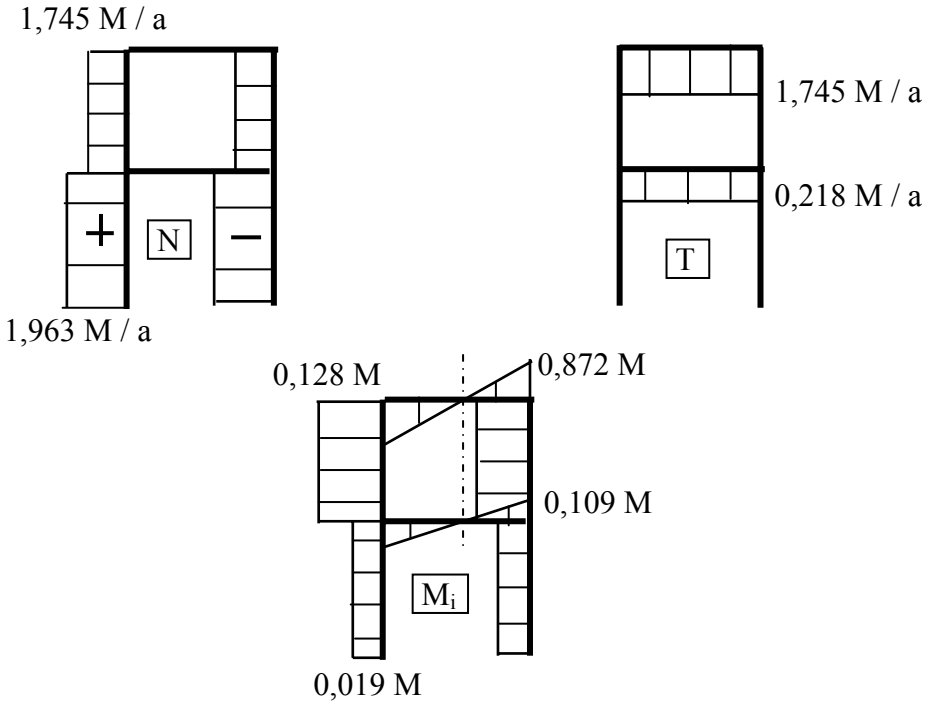


Fig.2.5.4-5

Orice sistem poate fi descompus într-un sistem simetric şi unul antisimetric. Un exemplu simplu este arătat în Fig.2.5.4-6.

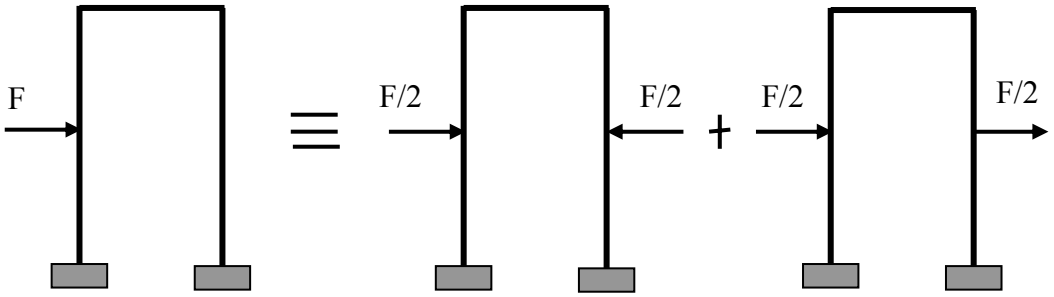


Fig.2.5.4-6

3. STABILITATEA ECHILIBRULUI ELASTIC. FLAMBAJUL

3.1 CONSIDERAȚII GENERALE

Se consideră o bară zveltă (lungime mare în raport cu dimensiunile transversale) solicitată la compresiune de o forță axială *F* (Fig.3.1-1). La început valoarea forței *F* este relativ mică. Sub acțiunea acestei forțe bara se scurtează dar rămâne dreaptă. Dacă barei i se aplică lateral o forță *F**, bara se deformează lateral, dar după înlăturarea forței ea revine imediat la poziția dreaptă avută anterior.

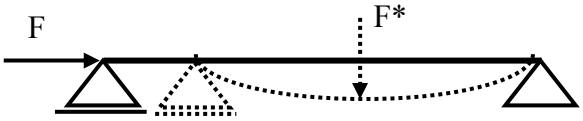


Fig.3.1-1

În acest caz, se spune că bara este în *echilibru elastic stabil.* Se mărește forța *F* iar la un moment dat, la aplicarea forței laterale *F** bara se deformează însă după înlăturarea acesteia, bara nu mai revine la forma ei dreaptă avută înainte de aplicarea forței axiale *F*. Bara se află în *echilibru elastic nestabil*. Valoarea forței *F* pentru care bara a trecut în echilibru nestabil, este o valoare critică, iar forța se numește *forță critică* și se notează cu F_{cr}.

Fenomenul de trecere al unei bare din echilibru stabil în unul nestabil, poartă numele de flambaj.

La creșteri mici ale forței axiale aplicate peste F_{cr}, deformarea laterală a barei crește foarte mult.

În cazul în care un element de rezistență și-a pierdut stabilitatea, aceasta poate avea loc în trei domenii:

- *domeniul elastic*, când după înlăturarea sarcinii axiale *F*, bara revine la forma ei inițială, adică dreaptă
- *domeniul elasto-plastic,* situație în care, după înlăturarea sarcinii axiale *F*, bara își mai diminuează din deformare, dar nu revine la forma ei inițială
- *domeniul plastic*, când bara rămâne la forma deformată și după înlăturarea sarcinii axiale *F*.

Pentru ca un element de rezistență să-și îndeplinească rolul funcțional, este necesar, pe lângă altele, să nu-și piardă stabilitatea elastică. Pierderea stabilității elastice, reprezintă așadar, o stare limită care nu trebuie atinsă într-un

element de rezistență. Dacă totuşi acest fenomen are loc, este de preferat să se producă în domeniul elastic, deoarece în acest caz, înlăturarea imediată a sarcinii care a provocat flambajul, conduce la refacerea formei inițiale a elementului de rezistență.

Pierderea stabilității elastice a elementelor de rezistență poate avea loc în mai multe situații, nu numai la o solicitare axială de compresiune. Se vor prezenta câteva astfel de cazuri, care se întâlnesc mai des în practică.

3.2 CALCULUL FORȚEI CRITICE DE FLAMBAJ LA BARELE DREPTE ZVELTE SOLICITATE LA COMPRESIUNE AXIALĂ (FORMULA LUI EULER)

Pentru elementele de rezistență susceptibile de a îşi pierde stabilitatea, este deosebit de important să se cunoască valoarea forței critice de flambaj, adică valoarea forței axiale de compresiune la care acesta îşi pierde stabilitatea. Se vor studia patru variante, avându-se în vedere faptul că forța critică de flambaj este în mare corelație cu modul de rezemare al barei.

3.2.1 Bara articulată la ambele capete

Se consideră o bară dreaptă zveltă asupra căreia acționează la compresiune tocmai forța critică F_{cr} (Fig.3.2.1-1).

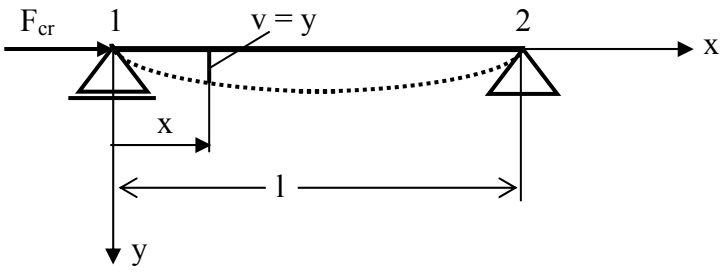


Fig.3.2.1-1

Sub acțiunea forței F_{cr} bara se deformează lateral. La o distanță x de reazemul *1*, forța critică F_{cr} determină un moment încovoietor M_i:

$$M_i = F_{cr} \cdot y \qquad 3.2.1\text{-}1$$

Ecuația fibrei medii deformate pentru acest caz conduce la :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_{iz}}{EI} = -\frac{F_{cr}}{EI} \cdot y \qquad 3.2.1\text{-}2$$

Notând cu

$$\frac{F_{cr}}{EI} = a^2 \qquad 3.2.1\text{-}3$$

relația 3.2.1-2 devine:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -a^2\, y$$
$$\Rightarrow \quad \frac{d^2y}{dx^2} + a^2\, y = 0 \qquad 3.2.1\text{-}4$$

care este o ecuație diferențială Euler, a cărei soluție este de forma:

$$y = A\sin ax + B\cos ax \qquad 3.2.1\text{-}5$$

Determinarea constantelor *A*, respectiv *B*, se face punând condițiile de rezemare:

$$\text{Pentru } x = 0 \;\Rightarrow\; y = 0 \;\Rightarrow\; B = 0 \;\Rightarrow\; y = A\sin ax \qquad 3.2.1\text{-}6$$

$$\text{Pentru } x = l \;\Rightarrow\; y = 0 \;\Rightarrow\; A\sin al = 0 \qquad 3.2.1\text{-}7$$

Cum $A \neq 0$, rezultă că *sin al = 0,* de unde:

$$al = k\pi \quad (\text{cu } k = 1,2,3...)$$

sau

$$\sqrt{\frac{F_{cr}}{EI}} \cdot l = k\pi$$

de unde rezultă expresia forței critice de flambaj:

$$F_{cr} = \frac{k^2\pi^2 EI}{l^2}$$

Deoarece din mulțimea posibilă a valorilor rezultate interesează valoarea minimă la care se produce flambajul, se va considera cazul pentru care *k = 1* şi *I* = I_{min}. Cu aceste precizări, forța minimă critică de flambaj este dată de relația:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E I_{min}}{l^2} \qquad 3.2.1\text{-}8$$

În relația 3.2.1-8:

$l = l_f$ – lungimea barei articulate la ambele capete (lungimea de flambaj)

I_{min} – momentul de inerție minim al secțiunii transversale a barei.

3.2.2. Bara înțepenită la un capăt şi liberă la celălalt

Sub acțiunea forței critice de flambaj bara se deformează şi ia forma şi poziția din Fig.3.2.2-1.

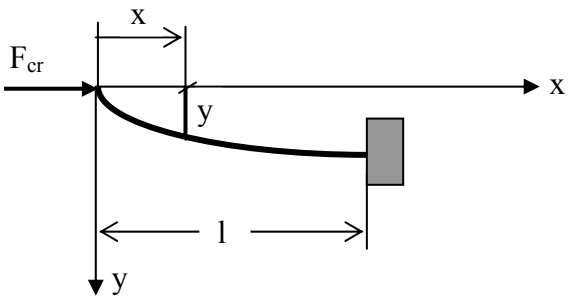


Fig.3.2.2-1

La distanța x de capătul liber, sub acțiunea forței critice se realizează momentul încovoietor:

$$M_i = F_{cr}\, y$$

iar ecuația fibrei medii deformate este:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M_i}{E I} = -\frac{F_{cr}}{E I} \cdot y$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{F_{cr}}{E I} \cdot y = 0$$

Notând şi aici

$$\frac{F_{cr}}{E\,I} = a^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + a^2\, y = 0 \qquad 3.2.2\text{-}1$$

Relația 3.2.2-1 este o ecuație diferențială de tip Euler care admite soluția:

$$y = A \sin ax + B \cos ax$$

Constantele *A*, respectiv *B* se determină din condiții de rezemare. Astfel:

$$\text{Pentru } x = 0 \;\Rightarrow\; y = 0 \;\Rightarrow\; B\cos ax = 0 \;\Rightarrow\; B = 0 \;\Rightarrow\; y = A\sin ax$$

$$\textit{Pentru } x = l \;\Rightarrow\; y \neq 0 \;\; \textit{şi} \;\; \varphi_{x=l} = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l} = 0$$

de unde:

$$A\,a\cos ax = \frac{dy}{dx} \;\Rightarrow\; \cos al = 0 \;\Rightarrow\; a\,l = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \ldots$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{F_{cr}}{E\,I}} \cdot l = \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; \frac{F_{cr}}{E\,I} = \frac{\pi^2}{(2\,l)^2} \;\Rightarrow\; F_{cr} = \frac{\pi^2 E\,I}{(2\,l)^2}$$

De aici rezultă forța critică minimă:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2\, E\, I_{min}}{(2l)^2} = \frac{\pi^2\, E\, I_{min}}{l_f^2} \qquad 3.2.2\text{-}2$$

În relația 3.2.2-2 s-a notat

$$l_f = 2l \qquad 3.2.2\text{-}3$$

şi reprezintă *lungimea de flambaj* pentru bara înțepenită la un capăt şi liberă la celălalt.

3.2.3 Bara articulată la un capăt şi înțepenită la celălalt

Bara articulată la un capăt şi înțepenită la celălalt solicitată de forța critică este prezentată în Fig.3.2.3-1. În articulație datorită tendinței de deplasare, apare şi o forță transversală *V*. La distanța *x* de articulație, momentul încovoietor este:

$$M_i = F_{cr}\, y - V\, x$$

Ecuația fibrei medii deformate pentru acest caz are forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_i}{EI} = \frac{-F_{cr}\,y + V\,x}{EI}$$

sau

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{F_{cr}}{EI}y = \frac{V}{EI}x$$

3.2.3-1

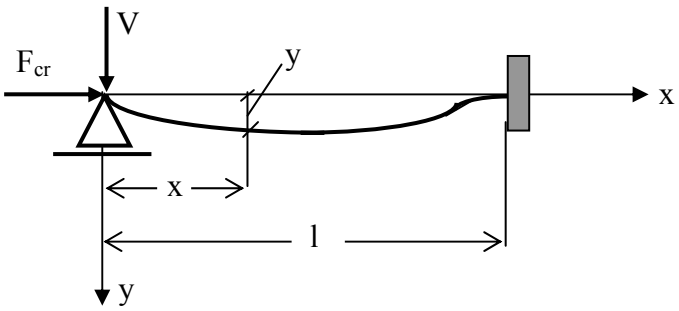


Fig.3.2.3-1

Ecuația 3.2.3-1 este o ecuație neomogenă. Partea omogenă a acesteia admite soluția:

$$y = A\sin ax + B\cos ax$$

unde s-a notat

$$\frac{F_{cr}}{EI} = a^2$$

Partea neomogenă admite soluția

$$y_1 = \frac{V}{F_{cr}}x$$

Ecuația neomogenă 3.2.3-1 admite acum soluția:

$$y = A\sin ax + B\cos ax + \frac{V}{F_{cr}}x \qquad 3.2.3\text{-}2$$

Constantele *A, B,* şi *V* se determină din condițiile rezemare şi deformare. Astfel:

Pentru $x = 0 \Rightarrow y = 0$

$x = l \Rightarrow y = 0$

$x = l \Rightarrow \varphi = \frac{dy}{dx} = 0$

Prima condiție conduce la *B = 0* şi ecuația capătă forma:

$$y = A \sin ax + \frac{V}{F_{cr}} x$$

$$\frac{dy}{dx} = A a \cos ax + \frac{V}{F_{cr}} \qquad 3.2.3\text{-}3$$

Ultima condiție aplicată la rotirea φ, conduce la:

$$0 = A a \cos al + \frac{V}{F_{cr}} \qquad 3.2.3\text{-}4$$

A doua condiție conduce la următoarea expresie:

$$0 = A \sin\ al + \frac{V}{F_{cr}} l \qquad 3.2.3\text{-}5$$

Relațiile 3.2.3-4 şi 3.2.3-5 se pot scrie şi sub forma:

$$A a \cos a l = -\frac{V}{F_{cr}}$$

$$A \sin\ a l = -\frac{V}{F_{cr}} l \qquad 3.2.3\text{-}6$$

Împărțind relațiile 3.2.3-6, rezultă:

$$\mathrm{tg}\ al = a l \qquad 3.2.3\text{-}7$$

Ecuația trigonometrică obținută are ca primă soluție:

$$a\,l = 4{,}49 \;\Rightarrow\; a^2 l^2 = 20{,}16 \;\Rightarrow\; a^2 = \frac{20{,}16}{l^2} = \frac{F_{cr}}{E\,I}$$

de unde se obține expresia forței critice:

$$F_{cr} = \frac{20{,}16\,E\,I}{l^2}$$

iar valoarea minimă a forței critice este:

$$F_{cr} = \frac{20{,}16\,E\,I_{min}}{l^2} \qquad 3.2.3\text{-}8$$

Pentru a avea aceeaşi formă ca şi pentru cazul anterior prezentat, se poate scrie:

$$20{,}16 = 2{,}05\,\pi^2 \approx 2\,\pi^2 \;\Rightarrow\; F_{cr} \approx \frac{2\,\pi^2\,E\,I_{min}}{l^2} = \frac{\pi^2\,E\,I_{min}}{\frac{l^2}{2}}$$

$$\Rightarrow\; F_{cr} = \frac{\pi^2\,E\,I_{min}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\,l\right)^2} = \frac{\pi^2\,E\,I_{min}}{l_f^2} \qquad 3.2.3\text{-}9$$

unde s-a notat

$$l_f = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot l$$

3.2.4 Bara înțepenită la ambele capete

Bara dreaptă înțepenită la ambele capete este solicitată de forța critică F_{cr} (Fig.3.2.4-1). Având în vedere că în încastrare apar trei necunoscute (F_{cr}, V, M_0), momentul încovoietor la distanța x are expresia:

$$M_i = F_{cr}\,y + V\,x + M_0 \qquad 3.2.4\text{-}1$$

Ecuația diferențială a fibrei medii deformate este:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{F_{cr}}{EI}y=-\frac{V}{EI}x-\frac{M_0}{EI} \qquad 3.2.4\text{-}2$$

sau dacă se notează:

$$a^2=\frac{F_{cr}}{EI}$$

relația 3.2.4-2 se poate scrie sub forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a^2y=-\frac{V}{EI}x-\frac{M_0}{EI} \qquad 3.2.4\text{-}3$$

Soluția generală a ecuației diferențiale este de forma:

$$y=A\sin ax+B\cos ax-\frac{V}{F_{cr}}x-\frac{M_0}{F_{cr}} \qquad 3.2.4\text{-}4$$

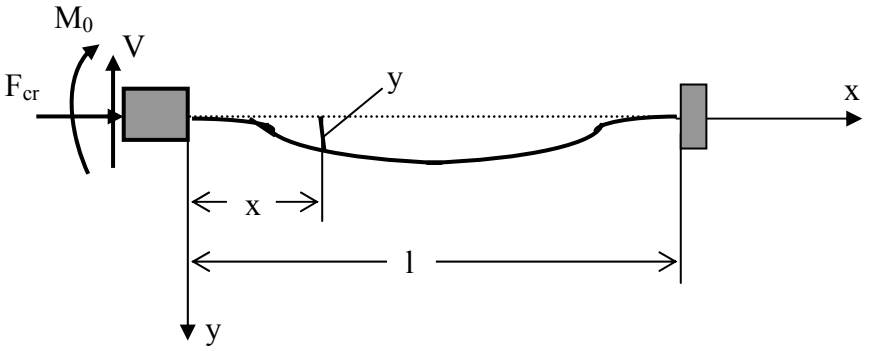


Fig.3.2.4-1

Derivând o dată relația 3.2.4-5, se obține:

$$\frac{dy}{dx}=Aa\sin ax+Ba\cos ax-\frac{V}{F_{cr}} \qquad 3.2.4\text{-}6$$

După cum se poate constata au rezultat patru necunoscute: *A, B,* V/F_{cr} şi M_0/F_{cr}. Pentru determinarea acestor constante necunoscute, se pun condițiile la limită:

Pentru $x = 0 \Rightarrow y = 0$ şi $\dfrac{dy}{dx} = 0$

Pentru $x = l \Rightarrow y = 0$ şi $\dfrac{dy}{dx} = 0$

După înlocuiri se ajunge la sistemul omogen:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -1 \\ a & 0 & -1 & 0 \\ \sin al & \cos al & -1 & -1 \\ a\cos al & -a\sin al & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A \\ B \\ \dfrac{V}{F_{cr}} \\ \dfrac{M_0}{F_{cr}} \end{bmatrix} = 0 \qquad 3.2.4\text{-}7$$

Ecuația caracteristică rezultă din anularea determinantului principal:

$$2(1 - \cos al) - al\sin al = 0 \qquad 3.2.4\text{-}8$$

Ecuația 3.2.4-8 admite o mulțime de soluții:

$$a\,l = 2\,k\,\pi \quad \text{cu} \quad k = 1,2,3... \qquad 3.2.4\text{-}9$$

din care pentru prima valoare se obține forța critică de flambaj:

$$\sqrt{\frac{F_{cr}}{E\,I_{min}}} \cdot l = 2\,\pi$$
$$\Rightarrow F_{cr} = \frac{4\,\pi^2 E\,I_{min}}{l^2} \qquad 3.2.4\text{-}10$$

Expresia forței critice de flambaj poate fi scrisă şi sub forma:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 E\,I_{min}}{\left(\dfrac{l}{2}\right)^2} = \frac{\pi^2\,E\,I_{min}}{l_f^2} \qquad 3.2.4\text{-}11$$

unde s-a notat cu:

$$l_f = \frac{l}{2} \qquad 3.2.4\text{-}12$$

şi reprezintă lungimea de flambaj.

Din prezentarea celor patru cazuri de rezemare, se constată că forța critică de flambaj depinde de modul de rezemare prin mărimea numită *lungime de flambaj*.

Pentru cele patru moduri de rezemare se poate considera pentru forța critică de flambaj o expresie generală, însă diferențiată prin lungimea de flambaj:

Astfel, relația generală de calcul a forței critice de flambaj pentru cazurile prezentate este:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 \, E \, I_{min}}{l_f^2} \qquad 3.2.4\text{-}13$$

unde:

- pentru bara articulată la ambele capete

$$l_f = l \qquad 3.2.4\text{-}14a$$

- pentru bara liberă la un capăt şi înțepenită la celălalt

$$l_f = 2l \qquad 3.2.4\text{-}14b$$

- pentru bara articulată la un capăt şi înțepenită la celălalt

$$l_f = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707 \cdot l \qquad 3.2.4\text{-}14c$$

- pentru bara înțepenită la ambele capete

$$l_f = \frac{1}{2} \cdot l \qquad 3.2.4\text{-}14d$$

unde prin *l* se înțelege lungimea geometrică a barei.

Se menționează că lungimea de flambaj l_f reprezintă distanța dintre două puncte de inflexiune ale fibrei medii deformate a barei.

Relațiile de calcul ale forței critice de flambaj reprezintă *formulele lui Euler*.

Pentru alte cazuri de încărcare a barelor zvelte, expresiile forței critice de flambaj se găsesc în literatura de specialitate.

3.3 LIMITELE DE VALABILITATE ALE FORMULEI LUI EULER. FLAMBAJUL ELASTIC ŞI PLASTIC

3.3.1 Flambajul elastic

La stabilirea formulei lui Euler s-a utilizat relația obținută la deducerea formulei lui Navier:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_i}{E\,I} \qquad 3.3.1\text{-}1$$

La comportarea liniar elastică a materialului este necesar ca tensiunea critică σ_{cr} să fie cel mult egală cu limita de proporționalitate σ_p.

Tensiunea critică de flambaj se obține împărțind forța critică de flambaj (relația 3.2.4-13) la aria secțiunii transversale a barei:

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2\,E\,I_{min}}{l_f^2 \cdot A} \le \sigma_p \qquad 3.3.1\text{-}2$$

Când tensiunea critică $\sigma_{cr} \ge \sigma_p$, relația lui Euler nu mai poate fi aplicată pentru calculul forței critice de flambaj.

Revenind la relația 3.3.1-2 şi exprimând momentul de inerție în funcție de aria secțiunii şi raza de girație, se obține pentru tensiunea critică de flambaj relația:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2\,E\,A\,i_{min}^2}{l_f^2 \cdot A} = \frac{\pi^2\,E}{\left(\dfrac{l_f}{i_{min}}\right)^2} = \frac{\pi^2\,E}{\lambda^2} \le \sigma_p \qquad 3.3.1\text{-}3$$

unde s-a notat cu

$$\lambda = \frac{l_f}{i_{min}} \qquad 3.3.1\text{-}4$$

care se numeşte *coeficient de zveltețe* sau *coeficient de subțirime al barei.*

Pentru ca relația lui Euler să poată fi aplicată, din relația 3.3.1-3, rezultă condiția:

$$\lambda \ge \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}} \qquad 3.3.1\text{-}5$$

Valoarea minimă a coeficientului de zveltețe, notat cu λ_0 , pentru care formula lui Euler este valabilă, corespunde limitei inferioare a flambajului elastic. Relația dintre tensiunea critică şi coeficientul de zveltețe (relația 3.3.1-3) este o hiperbolă, numită *hiperbola lui Euler* (Fig.3.3.1-1).

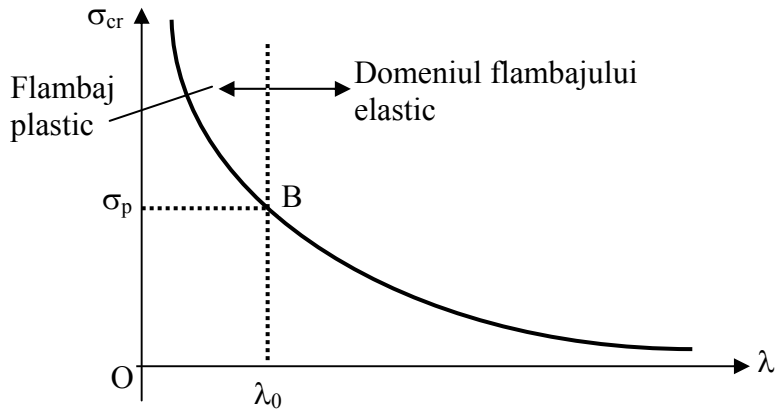


Fig.3.3.1-1

Punctul *B*, respectiv abscisa λ_0 împarte domeniul valorilor lui λ în două domenii:

- domeniul flambajului elastic, când $\sigma_{cr} \leq \sigma_p$, respectiv $\lambda \geq \lambda_0$
- domeniul flambajului plastic, când $\sigma_{cr} > \sigma_p$, respectiv $\lambda < \lambda_0$

Calculul la flambaj utilizând formula lui Euler este permis numai pentru domeniul elastic.

În funcție de valoarea acceptată pentru limita de proporționalitate (*210 MPa, 240 MPa*), pentru oțelul OL37 se poate considera $\lambda_0 = 105$ sau $\lambda_0 = 100$.

3.3.2 Flambajul plastic. Relațiile Tetmajer-Iasinski

Pentru valori ale coeficientului de zveltețe mai mici decât λ_0, tensiunea critică de flambaj nu mai corespunde hiperbolei lui Euler. Se pune atunci problema stabilirii unei relații între σ_{cr} şi λ şi pentru domeniul flambajului plastic. Pentru oțeluri, problema stabilirii unei astfel de relații devine destul de complicată datorită traseului curbiliniu al diagramei caracteristice peste limita de proporționalitate. În acest domeniu se introduce modulul de elasticitate tangent curent.

Flambajul plastic a fost studiat de mai mulți cercetători, care au propus diferite relații de calcul pentru tensiunea critică de flambaj, relații stabilite mai ales pe baza cercetărilor experimentale. Pentru domeniul flambajului plastic

pentru tensiunea critică de flambaj s-au propus relații parabolice, eliptice, liniare.

Tetmajer şi Iasinski propun până la atingerea limitei de curgere o relație liniară între tensiunea critică şi coeficientul de zveltețe (Fig.3.3.2-1):

$$\sigma_{cr} = a - b \cdot \lambda \qquad 3.3.2\text{-}1$$

ce corespunde dreptei *BD*.

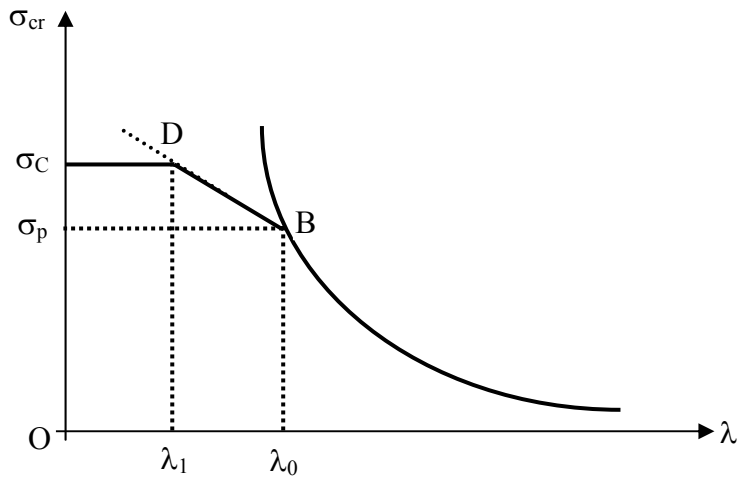


Fig.3.3.2-1

Când tensiunea critică atinge valoarea limitei de curgere, coeficientul de zveltețe este λ_1 (corespunzător punctului *D*). Pentru valori:

$$\lambda < \lambda_1 \qquad 3.3.2\text{-}2$$

se consideră că bara nu mai flambează, iar calculul se face numai la compresiune.

Coeficienții *a* şi *b* din relația 3.3.2-1 depind de material, la fel cum depind şi λ_0, respectiv λ_1. În Tabelul 3.3.2-1 se prezintă pentru câteva materiale valorile acestor coeficienți.

Tabelul 3.3.2-1

Materialul	a	b	λ_0	λ_1
OL 37 (σ_C = 240 MPa)	304	1,12	105	60
Oțel cu 5% nichel	461	2,25	86	0
Oțel crom-molibden	980	5,3	55	0
Duraluminiu	372	2,14	50	0
Lemn	28,7	0,19	100	0
Fontă	-	-	80	0

Pentru bare realizate din fontă, expresia tensiunii critice este una parabolică:

$$\sigma_{cr} = 776 - 12 \cdot \lambda + 0{,}053 \cdot \lambda^2 \qquad 3.3.2\text{-}3$$

3.4 CALCULUL LA FLAMBAJ

După cum s-a mai spus la începutul acestui capitol, flambajul nu este un fenomen dorit pentru o structură de rezistență. Tensiunea critică sau forța critică de flambaj sunt mărimi periculoase. Ca urmare, mărimea efortului axial din bara solicitată la compresiune trebuie să fie mai mică sau cel mult egală cu forța critică de flambaj.

Se defineşte atunci, *coeficientul de siguranță la flambaj* c_f ca fiind raportul dintre forța critică de flambaj F_{cr} şi efortul axial de compresiune efectiv N din bară:

$$c_f = \frac{F_{cr}}{N} \geq c_{af} \qquad 3.4\text{-}1$$

unde:

c_{af} – coeficient de siguranță admisibil la flambaj.

3.4.1 Calculul în domeniul elastic şi plastic

La flambaj se pot rezolva toate cele trei tipuri de problemă: verificare, dimensionare, încărcare capabilă, pe baza coeficientului de siguranță la flambaj. Valorile coeficientului de siguranță admisibil la flambaj se înscriu în limite destul de largi, neexistând prescripții oficiale pentru acestea. În Tabelul 3.4.1-1 se indică valorile coeficientului de siguranță admisibil la flambaj pentru câteva piese de maşini supuse pericolului de pierdere a stabilității.

Tabelul 3.4.1-1

P i e s a		c_{af}
Tija pistonului	Maşini cu un cilindru	8 – 12
	Maşini cu un cilindru şi contratijă; maşini cu doi cilindri	4 – 8
Biela	Maşini termice mari	14 – 28
	Motoare de automobil	4 – 4,5

Pentru piese de maşini, valoarea minimă a coeficientului de siguranță admisibil la flambaj este *4*.

Calculul la flambaj, indiferent de tipul problemei, se face pe baza relației 3.4-1.

a) *Probleme de verificare sau efort capabil.* Trebuie determinat efortul axial de compresiune din bară (numeric sau funcție de sarcinile exterioare) şi forța critică de flambaj.

Pentru a putea determina forța critică de flambaj (are valoare numerică) trebuie stabilit domeniul de flambaj. Se calculează coeficientul de zveltețe λ cu relația 3.3.1-4, care se compară cu λ_0 , respectiv λ_1:

- dacă

$$\lambda \geq \lambda_0 \quad \Rightarrow \quad F_{cr} = \frac{\pi^2 \, E \, I_{min}}{l_f^2}$$

$$\lambda_1 < \lambda \leq \lambda_0 \quad \Rightarrow \quad F_{cr} = \sigma_{cr} \cdot A = (a - b \cdot \lambda) \cdot A \qquad 3.4.1\text{-}2$$

Valorile astfel determinate se înlocuiesc în relația 3.4-1, de unde se face verificarea sau se deduce sarcina capabilă.

b) *Probleme de dimensionare.* La acest tip de problemă, necunoscându-se dimensiunile secțiunii transversale ale barei, nu se poate determina coeficientul de zveltețe, deci nici domeniul de flambaj. În această situație se consideră că bara flambează în domeniul elastic şi pentru forța critică de flambaj, se admite formula lui Euler. Aceasta se înlocuieşte în relația 3.4-1, de unde rezultă:

$$I_{min,nec} = \frac{N \cdot c_{af} \cdot l_f^2}{\pi^2 \cdot E} \qquad 3.4.1\text{-}3$$

Din 3.4.1-3 se determină dimensiunea secțiunii transversale a barei. După determinarea dimensiunii secțiunii este necesar un calcul de verificare al domeniului de flambaj. Pentru aceasta:

- se calculează cu dimensiunea găsită, coeficientul de zveltețe λ
- dacă $\lambda \geq \lambda_0$ dimensiunea găsită este bună (se acceptă, verificându-se domeniul de flambaj)
- dacă $\lambda < \lambda_0$, nu se verifică domeniul. În acest caz:
  - se calculează forța critică de flambaj cu relația corespunzătoare domeniului plastic (relația 3.4.1-2) şi apoi coeficientul de siguranță la flambaj (relația 3.4.1-1). Dacă:
    - $c_f \geq c_{af}$ dimensiunea se acceptă (se verifică coeficientul de siguranță dar nu şi domeniul de flambaj)
    - $c_f < c_{af}$ dimensiunea nu se acceptă (nu se verifică nici coeficientul de siguranță, nici domeniul)
- se măreşte dimensiunea găsită inițial şi se parcurg toate etapele de la calculul coeficientului de zveltețe până când $c_f \geq c_{af}$.

3.4.2 Calculul la flambaj prin metoda coeficientului de flambaj φ

Procedeul prezentat pentru calculul forței critice de flambaj, după cum se poate constata, implică o serie de încercări, mai ales în domeniul flambajului plastic. Pentru valori bine precizate ale coeficientului de siguranță admisibil la flambaj, s-a dezvoltat o metodă de calcul valabilă atât pentru domeniul elastic, cât şi plastic. Conform acestei metode, mai întâi se defineşte *rezistența admisibilă la flambaj:*

$$\sigma_{af} = \frac{\sigma_{cr}}{c_{af}} = \frac{F_{cr}}{A \cdot c_{af}} = \frac{F_r}{A} \qquad 3.4.2\text{-}1$$

unde:

F_r – forța axială reală din bară

$$F_r = \frac{F_{cr}}{c_{af}} \qquad 3.4.2\text{-}2$$

A – aria secțiunii transversale a barei

Pe baza celor prezentate, calculul la flambaj poate fi transformat într-un calcul de dimensionare la compresiune:

$$A_{nec} = \frac{F_r}{\sigma_{af}} \qquad 3.4.2\text{-}3$$

Se defineşte acum un *coeficient de flambaj:*

$$\varphi = \frac{\sigma_{af}}{\sigma_a} < 1 \qquad 3.4.2\text{-}4$$

unde:

σ_a – este rezistența admisibilă la compresiune

Acum, relația de dimensionare (relația 3.4.2-3) capătă forma:

$$A_{nec} = \frac{F_r}{\varphi \cdot \sigma_a} \qquad 3.4.2\text{-}5$$

Se poate efectua şi calculul de verificare, cu relația:

$$\sigma_{ef} = \frac{F_r}{\varphi \cdot A} < \sigma_a \qquad 3.4.2\text{-}6$$

După cum se poate constata, calculul la flambaj prin această metodă implică determinarea coeficientului de flambaj φ. Valoarea acestuia este funcție de natura materialului şi de lungimea de flambaj λ. În literatura de specialitate se găsesc valorile coeficientului de flambaj φ pentru diferite materiale.

Calculul de dimensionare la flambaj prin coeficientului de flambaj φ, necesită parcurgerea următoarelor **etape**:

- se determină efortul axial *N* şi tensiunea admisibilă a materialului σ_a
- se determină dimensiunea secțiunii transversale cu relația 3.4.2-3
- cu dimensiunea găsită se calculează coeficientul de zveltețe λ
- din tabele se determină coeficientul de flambaj φ, funcție de λ determinat anterior
- se calculează o forță admisibilă

$$F_{af} = \varphi \cdot \sigma_a \cdot A_{ef}$$

Dacă:

- $F_{af} > N \Rightarrow$ dimensiunea este bună (acceptată)
- $F_{af} < N \Rightarrow$ dimensiunea nu este corespunzătoare.

În acest ultim caz se măreşte dimensiunea secțiunii transversale şi se reia calculul de la determinarea coeficientului de flambaj λ. El se încheie atunci când condiția de mai sus este verificată.

3.5 FLAMBAJUL BARELOR SUB ACȚIUNEA FORȚELOR EXCENTRICE

Se consideră o bară dublu articulată solicitată chiar de forța critică F_{cr} aplicată excentric, ca în Fig.3.5-1.

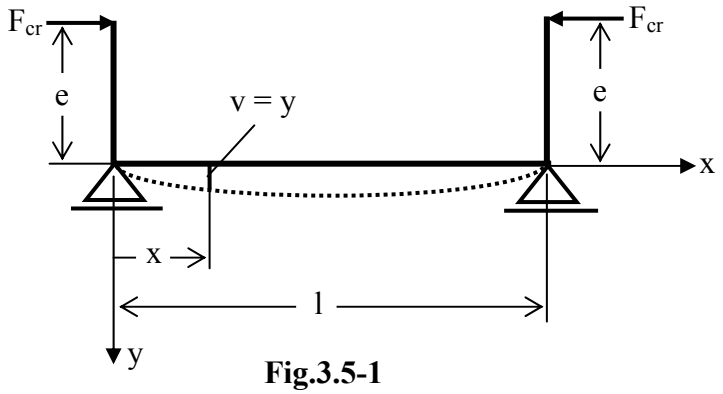


Fig.3.5-1

În secțiunea *x* se produce momentul încovoietor M_i

$$M_i = F_{cr}\left(e + y\right) \qquad 3.5\text{-}1$$

iar ecuația diferențială a fibrei medii deformate este:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{F_{cr}}{EI}y - \frac{F_{cr}}{EI}e$$
$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{F_{cr}}{EI}y = -\frac{F_{cr}}{EI}e \qquad 3.5\text{-}2$$

Se notează:

$$a^2 = \frac{F_{cr}}{EI} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{\frac{F_{cr}}{EI}} \qquad 3.5\text{-}3$$

Cu această notație, relația 3.5-2 capătă forma:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a^2 \cdot y = -a^2 \cdot e \qquad 3.5\text{-}4$$

care are ca soluție pe:

$$y = A\sin ax + B\cos ax - e \qquad 3.5\text{-}5$$

Constantele din relația 3.5-5 se determină din condițiile la limită:

$$\text{Pentru } x = 0 \;\Rightarrow\; y = 0 \;\Rightarrow 0 = B - e \;\Rightarrow\; B = e$$
$$\Rightarrow\; y = A\sin ax + e\cos ax - e \qquad 3.5\text{-}6a$$

$$\text{Pentru } x = l \;\Rightarrow\; y = 0 \;\Rightarrow 0 = A\sin al + e\cos al - e$$
$$\Rightarrow\; A = e \cdot \frac{1 - \cos al}{\sin al} = e \cdot tg\frac{al}{2} \qquad 3.5\text{-}6b$$
$$\Rightarrow\; y = e \cdot tg\frac{al}{2} \cdot \sin ax + e\cos ax - e$$

sau sub altă formă, ecuația săgeții este:

$$y = e \cdot \left(tg\frac{al}{2} \cdot \sin ax + \cos ax - 1) \right) \qquad 3.5\text{-}7$$

Pentru $x = \frac{l}{2} \Rightarrow \varphi = 0$ sau $y = y_{max} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y_{max} = e \cdot \left(tg\frac{al}{2} \cdot \sin\frac{al}{2} + \cos\frac{al}{2} - 1 \right) = e\left(\frac{\sin\frac{al}{2}}{\cos\frac{al}{2}} \cdot \sin\frac{al}{2} + \cos\frac{al}{2} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow y_{max} = \frac{\sin^2\frac{al}{2} + \cos^2\frac{al}{2} - \cos\frac{al}{2}}{\cos\frac{al}{2}} = e \cdot \frac{1 - \cos\frac{al}{2}}{\cos\frac{al}{2}} \qquad 3.5\text{-}8$$

Pentru ca săgeata *y* să fie maximă, în relația 3.5-8 trebuie ca mărimea *cos al/2* să fie minimă. Rezultă atunci:

$$\cos\frac{al}{2} = 0 \Rightarrow a\,l = \pi \Rightarrow a = \frac{\pi}{l}$$

Ținând seama de relația 3.5-3, se obține:

$$\sqrt{\frac{F_{cr}}{E\,I}} = \frac{\pi}{l} \Rightarrow \frac{F_{cr}}{E\,I} = \frac{\pi^2}{l^2}$$

de unde se rezultă expresia forței critice minime de flambaj:

$$F_{cr} = \frac{\pi^2\,E\,I_{min}}{l_f^2} \qquad 3.5\text{-}9$$

Din studiul efectuat, se constată că s-a obținut aceeaşi expresie pentru forța critică de flambaj ca în cazul barei solicitată centric. Deci, se poate afirma că excentricitatea sarcinii nu modifică mărimea forței critice de flambaj.

3.6 FLAMBAJUL LATERAL AL GRINZILOR SUBȚIRI SOLICITATE LA ÎNCOVOIERE

Este cunoscut faptul că rezistența unei grinzi este cu atât mai mare, cu cât grinda are un moment de inerție mai mare. Există atunci tendința de a realiza grinzi cu secțiuni cât mai înalte şi înguste. Astfel de elemente de rezistență devin instabile, producându-se un *flambaj lateral* atunci când sunt solicitate chiar numai de un moment încovoietor. La atingerea valorii critice a sarcinii se produc brusc deplasări laterale de încovoiere (w) şi de răsucire (φ). Pentru prima dată, Prandtl a studiat analitic problema flambajului lateral.

Se consideră o grindă de secțiune dreptunghiulară înțepenită la un capăt şi liberă la celălalt, încărcată la capătul liber cu un cuplu M_0 (Fig.4.6-1a). Grinda are înălțime mare şi lățime mică.

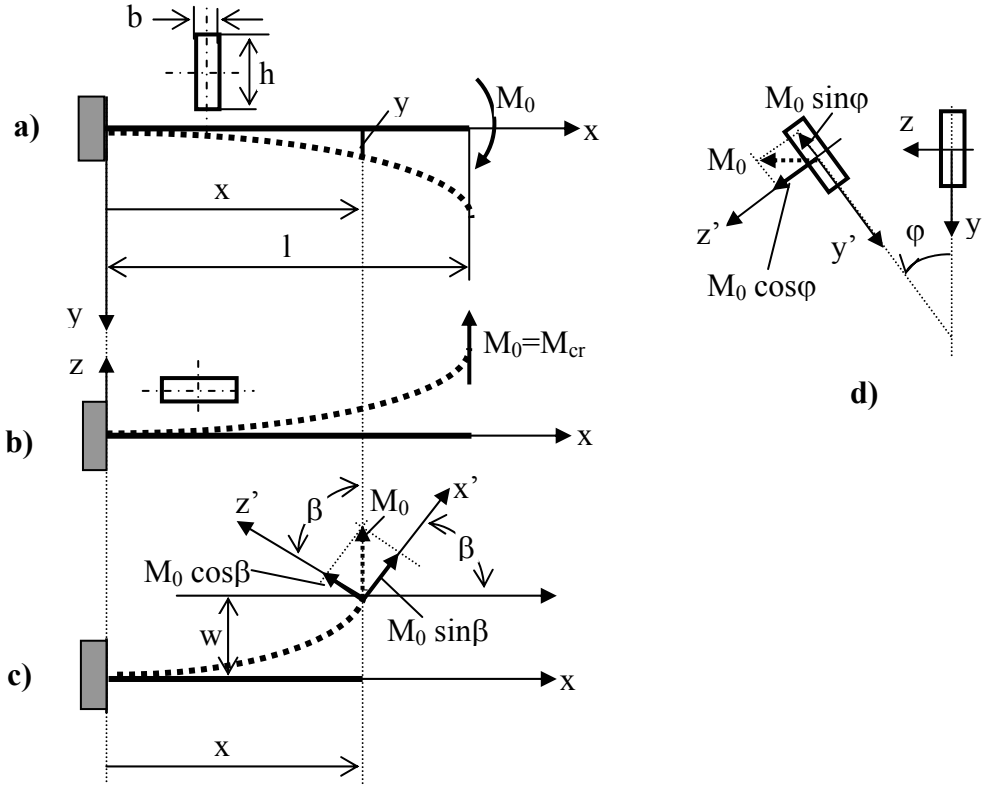


Fig.3.6-1

Pentru $M_0 < M_{cr}$ grinda se deformează numai în planul xOy, cu săgețile y mici (Fig.3.6-1a)

Când $M_0 = M_{cr}$ poziția de echilibru în planul xOy devine nestabilă şi bara se deformează (Fig.3.6-1b). Considerăm că la trecerea de la prima poziție la cea

de-a doua, momentul aplicat M_0 rămâne dirijat după axa *Oz* (Fig.3.6-1d). În această poziție, pe direcțiile Oy', respectiv *Oz'* apar momentele:

- pe direcția *Oy'* $\Rightarrow$ $M_{y'} = M_0 \sin\varphi \approx M_0\ \varphi$ 3.6-1a
- pe direcția *Oz'* $\Rightarrow$ $M_{z'} = M_0 \cos\varphi$ 3.6-1b

Pentru deformarea grinzii în planul *xOz* cu componentele momentului pe direcțiile *Ox'*, respectiv *Oz'* (Fig.3.6-1c) se poate scrie:

$$M_{x'} = M_0 \sin\beta \approx M_0\ \mathrm{tg}\beta = M_0 \frac{dw}{dx} \qquad 3.6\text{-}2$$

Aproximările din relația 3.6-1a, respectiv 3.6-2, sunt permise deoarece deplasările (liniare, unghiulare) sunt mici.

Ecuația diferențială a fibrei medii deformate pe direcția Oz sau *Oz'* datorită momentului $M_{y'}$ (vezi relația 3.6-1a) este:

$$E\,I_y \frac{d^2 w}{dx^2} = -M_{y'} = -M_0\,\varphi \qquad 3.6\text{-}3$$

iar cea a răsucirii datorită momentului $M_{x'}$ (vezi relația 3.6-2):

$$G\,I_t \frac{d\varphi}{dx} = -M_{x'} = M_0 \frac{dw}{dx} \qquad 3.6\text{-}4$$

Derivând relația 3.6-4 încă o dată, se obține:

$$G\,I_t \frac{d^2\varphi}{dx^2} = M_0 \frac{d^2 w}{dx^2} \qquad 3.6\text{-}5$$

Din relațiile 3.6-3 şi 3.6-5 rezultă:

$$G\,I_t \frac{d^2\varphi}{dx^2} = -M_0 \frac{M_0\,\varphi}{E\,I_y} = -\frac{M_0^2\,\varphi}{E\,I_y}$$

de unde:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{M_0^2}{E\,I_y \cdot G\,I_t} \cdot \varphi = 0 \qquad 3.6\text{-}6$$

Coeficientul lui φ din relația 3.6-6 se notează cu a^2:

$$a^2 = \frac{M_0^2}{EI_y \cdot GI_t} \qquad 3.6\text{-}7$$

după care relația 3.6-6 reprezintă o ecuație diferențială de tip Euler:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + a^2\varphi = 0 \qquad 3.6\text{-}8$$

care admite o soluție de forma:

$$\varphi = A\sin ax + B\cos ax \qquad 3.6\text{-}9$$

Constantele *A* şi *B* se determină din condițiile de rezemare:

$$\text{Pentru } x = 0 \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow B = 0 \Rightarrow \varphi = A\sin ax \qquad 3.6\text{-}10a$$

$$\text{Pentru } x = l \Rightarrow \varphi = \varphi_{max} \Rightarrow \varphi_{max} = A\sin al$$
$$\Rightarrow \sin al = 1 \qquad 3.6\text{-}10b$$

$$\Rightarrow al = \frac{\pi}{2} \Rightarrow a = \frac{\pi}{2l} \Rightarrow \frac{M_0}{\sqrt{EI_y \cdot GI_t}} = \frac{\pi}{(2l)}$$

$$\Rightarrow M_0 = \frac{\pi}{(2l)} \cdot \sqrt{EI_y \cdot GI_t} = \frac{\pi}{l_f^2} \cdot \sqrt{EI_y \cdot GI_t} \qquad 3.6\text{-}11$$

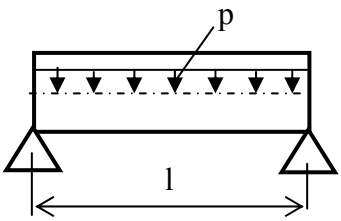
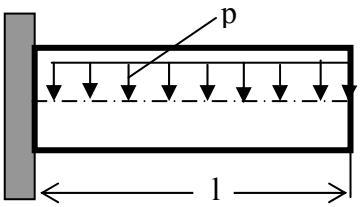
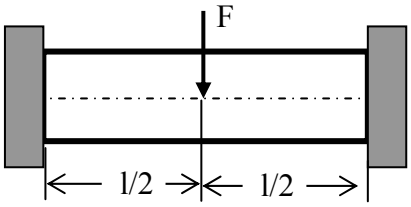
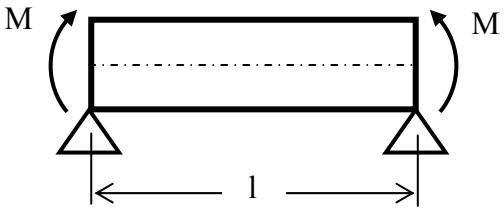
Cum $M_0 = M_{cr}$, relația 3.6-11 conduce la expresia încărcării critice la flambajul lateral:

$$M_{cr} = \frac{\pi \cdot \sqrt{EI_{min} \cdot GI_t}}{l_f^2} \qquad 3.6\text{-}12$$

Expresia $EI_{min}GI_t$ (produsul rigidității minime la încovoiere cu cel de torsiune) este o caracteristică a flambajului lateral, indiferent de modul de încărcare sau rezemare a barei.

În Tabelul 3.6-1 se prezintă expresiile sarcinii critice de flambaj lateral, pentru câteva cazuri de încărcare.

Tabelul 3.6-1

Modul de încărcare şi rezemare	Sarcina critică de flambaj
Bara simplu rezemată la capete, cu o sarcină uniform distribuită p, aplicată la înălțimea fibrei medii 	$(pl)_{cr} = \frac{28,3}{l^2} \cdot \sqrt{EI_y \cdot GI_t}$
Bara încastrată la un capăt, încărcată cu o sarcină uniform distribuită, aplicată la înălțimea fibrei medii 	$(pl)_{cr} = \frac{12,85}{l^2} \cdot \sqrt{EI_y \cdot GI_t}$
Bara încastrată la capete, încărcată cu o forță F în mijloc, aplicată în centrul de greutate al secțiunii 	$F_{cr} = \frac{26,6}{l^2} \cdot \sqrt{EI_y \cdot GI_t}$
Bara simplu rezemată la capete, supusă la încovoiere pură 	$M_{cr} = \frac{\pi}{l} \cdot \sqrt{EI_y \cdot GI_t}$

3.7 APLICAȚII

Aplicația 3.7.1. *Să se dimensioneze barele sistemului din Fig.3.6-2, pentru care se cunosc: p=24 KN/m, a_1 = 1,2 m, a_2 = 1,8 m, c_{af} = 3, E = 2,1·10^5 MPa, σ_{cr} = 310 - 1,14 λ. Bara orizontală are rigiditate foarte mare.*

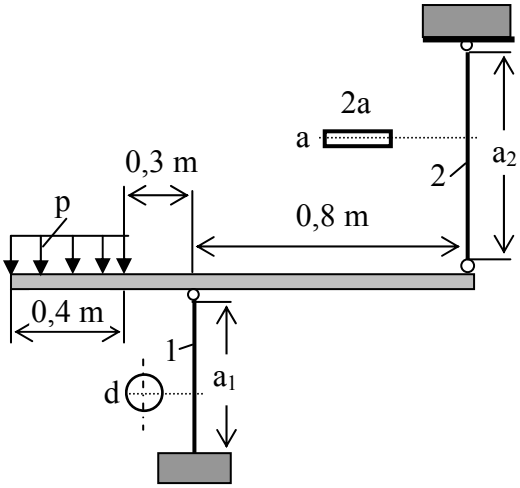


Fig.3.6-2

Rezolvare

Calculul static conduce la următoarele valori pentru eforturile axiale din cele două bare:

$$N_1 = 15,6\ KN$$
$$N_2 = 6\ KN$$

şi sunt de compresiune. Rezultă că cele două bare sunt predispuse fenomenului de flambaj. Bara *1* este articulată la un capăt şi înțepenită la celălalt, iar bara *2* este articulată la ambele capete. Problema fiind de dimensionare, nu se poate calcula coeficientul de zveltețe λ şi ca urmare nici domeniul de flambaj. În acest caz (vezi etapele de calcul), dimensionarea se face pentru domeniul elastic.

Lungimile de flambaj ale barelor sunt:

$$l_{1f} = 0,7\ a_1 = 0,84\ m$$
$$l_{2f} = a_2 = 1\ ,8\ m$$

Relația generală de dimensionare este:

$$I_{min,nec} = \frac{l_f^2 \cdot N \cdot c_{af}}{\pi^2 \cdot E}$$

Particularizată pentru cele două bare, se obține:

- *pentru bara 1*

$$I_{min,nec1} = \frac{l_{1f}^2 \cdot N_1 \cdot c_{af}}{\pi^2 \cdot E} = \frac{\pi d^4}{64}$$

$$\Rightarrow \; d = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot l_{1f}^2 \cdot N_1 \cdot c_{af}}{\pi^3 \cdot E}} = 24 \text{ mm}$$

- *pentru bara 2*

$$I_{min,nec2} = \frac{l_{2f}^2 \cdot N_2 \cdot c_{af}}{\pi^2 \cdot E} = \frac{(a)^3 \cdot 2a}{12} = \frac{a^4}{6}$$

$$\Rightarrow \; a = \sqrt[4]{\frac{6 \cdot l_{2f}^2 \cdot N_2 \cdot c_{af}}{\pi^2 \cdot E}} = 21 \text{ mm}$$

Se verifică domeniul de flambaj. Pentru

- *bara 1*

$$\lambda = \frac{l_{1f}}{i_{min1}} = \frac{l_{1f}}{\frac{d}{4}} = 140 > \lambda_0$$

Fiind verificat domeniul de flambaj, dimensiunea rezultată din calcul este acceptată: *d = 24 m*

- *bara 2*

$$\lambda = \frac{l_{2f}}{i_{min2}} = \frac{l_{2f}}{\sqrt{\frac{a^2}{12}}} = 296{,}9 > \lambda_0$$

Și pentru această bară se verifică domeniul de flambaj. Se acceptă atunci dimensiunea *a = 21 mm*.

Dimensiunile celor două bare sunt:

d = 24 mm
a = 21 mm.

Observație: În calculul prezentat s-a neglijat calculul de rezistență al barelor. În mod normal, la început se efectuează calculul de rezistență după care urmează cel la stabilitate.

Aplicația 3.7.2. *Să se determine încărcarea capabilă pentru sistemul de bare din Fig.3.6-3, dacă se cunosc:* σ_a *= 150 MPa,* c_{af} *= 3,* σ_{cr} *=310 – 1,14λ, E =* $2{,}1\cdot10^5$ *MPa,* d_1 *= 40 mm,* d_2 *= 60 mm.*

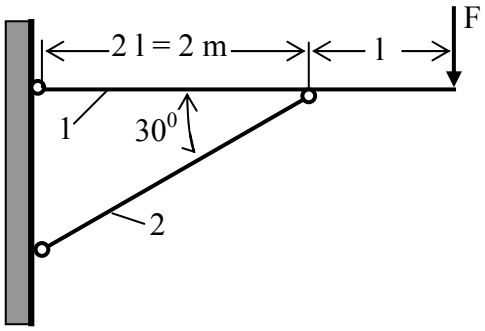


Fig.3.6-3

Rezolvare

Din condițiile de stabilitate rezultă efortul axial de compresiune din bara *2*: N_2 = *3F.*

Bara *1*, este solicitată la încovoiere. Momentul maxim are valoarea M_{imax} = *F l.* Calcul de rezistență al barei *1*, conduce la :

$$M_{icap} = \sigma_a W_{z\,min,1} = F'\cdot l \;\Rightarrow\; F'_{cap} = \frac{\sigma_a \cdot W_{z\,min,1}}{l} = 0{,}942 \;\; KN$$

Bara *2* este solicitată la compresiune. La început se efectuează calculul de rezistență:

$$N_{2cap} = \sigma_a A_2 = 3F'' \;\Rightarrow\; F'' = \frac{\sigma_a A_2}{3} = 141{,}37 \;\; KN$$

Calculul la stabilitate presupune stabilirea domeniului de flambaj. În acest scop se calculează coeficientul de zveltețe λ:

$$\lambda = \frac{l_{2f}}{i_{min\,2}} = 153{,}3 > \lambda_0$$

Valoarea coeficientului de zveltețe indică domeniul elastic de stabilitate. Pentru acest domeniu, forța critică de flambaj se calculează cu relația lui Euler:

$$F_{cr,2} = \frac{\pi^2 E I_{min,2}}{l_{2f}^2} = 249{,}25 \;\; KN$$

În expresia forței critice de flambaj s-a avut în vedere că lungimea de flambaj a barei *2* este egală cu lungimea ei geometrică (bara este articulată la ambele capete).

Relația de calcul pentru încărcarea capabilă la flambaj a barei *2* este:

$$\frac{F_{cr,2}}{N_2} = c_{af}$$

$$\Rightarrow \frac{F_{cr,2}}{3F'''} = c_{af} \Rightarrow F''' = \frac{F_{cr,2}}{3 \cdot c_{af}} = 27{,}69 \text{ KN}$$

Forța capabilă finală pentru sistemul analizat este:

$$F_{cap} = \min(F', F'', F''') = 0{,}942 \text{ KN}$$

Din calculul efectuat, rezultă că elementul periculos al sistemului este grinda *1*, care este solicitată la încovoiere.

4. SOLICITĂRI DINAMICE

4.1 CONSIDERAȚII GENERALE

În capitolele precedente s-a considerat că sarcinile acționează asupra elementelor de rezistență cu intensitate crescândă de la zero la valoarea lor nominală. Sub acțiunea acestora, corpurile se deformează dar nu se mişcă. Există multe situații în practică unde elementele de rezistență se mişcă, iar mişcarea lor, prin forța de inerție, determină stări de solicitare. Solicitările astfel produse poartă numele de *solicitări dinamice.*

Solicitările dinamice se pot clasifica în mai multe categorii:

- Solicitări produse prin *accelerații constante* sau cu variație mică. În această categorie intră solicitările prin forțe de inerție.
- Solicitări produse prin *variația bruscă a accelerației*. Se pot aminti aici solicitările produse prin şocuri în urma ciocnirilor dintre corpuri.
- Solicitări prin *variația periodică a accelerației*. Din această categorie fac parte vibrațiile sistemelor elastice şi calculul de rezistență la oboseală prin solicitări variabile periodic în timp.

Calculul de rezistență la oboseală face obiectul altui capitol.

4.2 SOLICITĂRI PRIN FORȚE DE INERȚIE

Majoritatea organelor de maşini aflate în mişcare sunt solicitate dinamic datorită forțelor de inerție care apar şi care se suprapun peste cele direct aplicate şi de legătură. Pentru rezolvarea unor astfel de probleme, se aplică principiul lui d'Alambert, care permite astfel tratarea unei probleme dinamice ca una statică. Se pot utiliza atunci metodele de calcul din statică. Această metodă de rezolvare a problemelor dinamice este cunoscută sub denumirea de *metoda cineto-statică*. Metoda cineto-statică impune cunoaşterea accelerației *a* pentru toate punctele elementului aflat în mişcare.

Forța de inerție elementară dF_i a fiecărui element de masă elementară *dm* este dată de relația cunoscută:

$$dF_i = a \cdot dm \qquad 4.2\text{-}1$$

şi are sens contrar accelerației.

Însumarea tuturor forțelor de inerție şi reducerea acestora conduce la un torsor format dintr-o forță rezultantă şi un moment rezultant.

În mişcarea de translație toate punctele elementului au aceeaşi accelerație.

Prin reducerea forțelor de inerție în centrul de greutate se obține numai o forță de inerție rezultantă:

$$F_i = m \cdot a \qquad 4.2\text{-}2$$

unde,

m – este masa întregului element.

În *mişcarea de rotație cu axă fixă*, accelerația elementului de masă *dm* care se află la distanța *r* de axa de rotație, depinde de viteza unghiulară ω şi accelerația unghiulară ε a corpului. Unei accelerații normale (centripete)

$$a_n = r \cdot \omega^2 \qquad 4.2\text{-}3$$

îi corespunde o *forță centrifugă:*

$$dF_{ic} = a_n \cdot dm = r \cdot \omega^2 \cdot dm \qquad 4.2\text{-}4$$

iar accelerației tangențiale

$$a_t = r \cdot \varepsilon \qquad 4.2\text{-}5$$

îi corespunde o *forță de inerție tangențială:*

$$dF_{it} = a_t \cdot dm = r \cdot \varepsilon \cdot dm \qquad 4.2\text{-}6$$

Prin însumarea celor două forțe de inerție (centrifugă şi tangențială) care sunt normale ca direcție, se obține forța de inerție ce acționează asupra elementului:

$$dF_i = \sqrt{dF_{ic}^2 + dF_{it}^2} = r \cdot \sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}\ dm \qquad 4.2\text{-}7$$

Dacă centrul de greutate (al maselor) este situat pe axa de rotație, forțele de inerție elementare se reduc numai la un *cuplu de inerție:*

$$C_i = J \cdot \varepsilon \qquad 4.2\text{-}8$$

unde,

J – momentul de inerție masic al corpului față de axa de rotație.

4.2.1 Calculul cablului de ascensor sau de macara

Schema de funcționare a unui ascensor este prezentată în Fig.4.2.1-1.

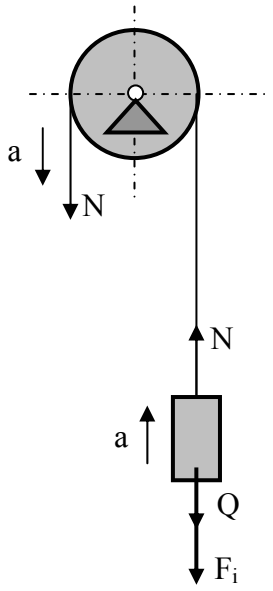


Fig.4.2.1-1

Cabina ascensorului (împreună cu persoanele dinăuntru) are greutatea *Q* iar greutatea cablului de susținere se neglijează. Dintre toate pozițiile posibile ale ascensorului, poziția cea mai periculoasă este la pornirea acestuia în mișcarea de urcare. În această poziție ascensorul are accelerația ascensională *a*. Forța de inerție F_i corespunzătoare acestei accelerații (orientată invers accelerației) este dată de relația cunoscută:

$$F_i = m \cdot a = \frac{Q}{g} \cdot a \qquad 4.2.1\text{-}1$$

Punând condiția de echilibru pentru cabină, se obține *efortul axial dinamic* N_d din cablul ascensorului:

$$N_d = Q + F_i = Q \cdot \left(1 + \frac{a}{g}\right) = Q \cdot \psi \qquad 4.2.1\text{-}2$$

unde

$$\psi = 1 + \frac{a}{g} > 1 \qquad 4.2.1\text{-}3$$

şi se numeşte *coeficient dinamic*. Forța axială dinamică creează în cablu o *tensiune dinamică* σ_d:

$$\sigma_d = \frac{N_d}{A} = \frac{Q}{A} \cdot \psi = \sigma_{st} \cdot \psi \qquad 4.2.1\text{-}4$$

Se constată că tensiunea dinamică este egală cu produsul dintre tensiunea statică σ_{st} şi coeficientul dinamic ψ. Tensiunea statică este tensiunea produsă atunci când ascensorul se află într-o mişcare rectilinie sau este în repaus.

Condiția de rezistență impune ca tensiunea dinamică să fie mai mică sau cel mult egală cu tensiunea normală admisibilă:

$$\sigma_d = \sigma_{st} \cdot \psi \le \sigma_a \qquad 4.2.1\text{-}5$$

4.2.2 Calculul volantului în mişcarea de rotație

Volanții sunt organe de maşini frecvent întâlniți în componența maşinilor şi ei au rolul de a înmagazina o mare cantitate de energie cinetică.
Volanții au formă de:

- roată cu obadă, spițe şi butuc (Fig.4.2.2-1a)
- disc plin îngroşat în zona de fixare pe arbore şi în zona periferică (Fig.4.2.2-1b).

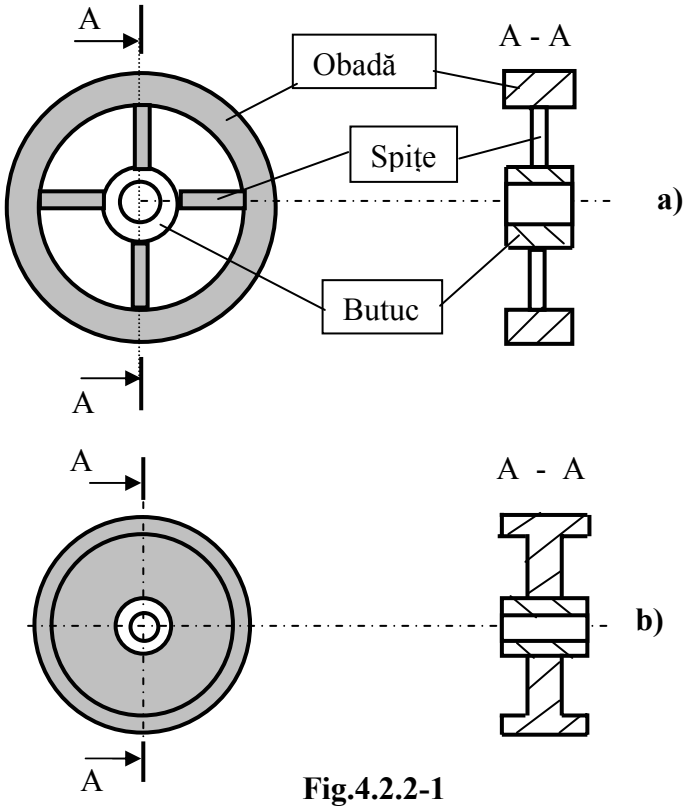


Fig.4.2.2-1

Volanții efectuează o mişcare de rotație cu viteză unghiulară ω de obicei constantă, în jurul unei axe fixe. Elementele discului sunt supuse astfel forțelor de inerție (forțelor centrifuge).

Determinarea tensiunilor se poate efectua prin mai multe metode:

- *calculul aproximativ* neglijează spițele şi butucul, iar obada este considerată un inel subțire în mişcare de rotație. Masa spițelor se neglijează în comparație cu masa obadei, iar grosimea obadei este mică în comparație cu diametrul mediu *2R* al volantului
- *calculul volantului ca un disc* aflat în mişcare de rotație
- *calculul volantului considerând şi spițele*. În această ipoteză, volantul este un sistem static nedeterminat.

Dacă turația volantului *n [rot/min]* este constantă, atunci viteza unghiulară ω a acestuia este:

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30} \left[rad / s^2 \right] \qquad 4.2.2\text{-}1$$

Se va prezenta calculul aproximativ al volantului. Forțele de inerție centrifuge solicită secțiunile transversale ale obadei (Fig.4.2.2-2a). Pentru determinarea efortului axial din obadă se detaşează un element din aceasta (Fig.4.2.2-2a,b).

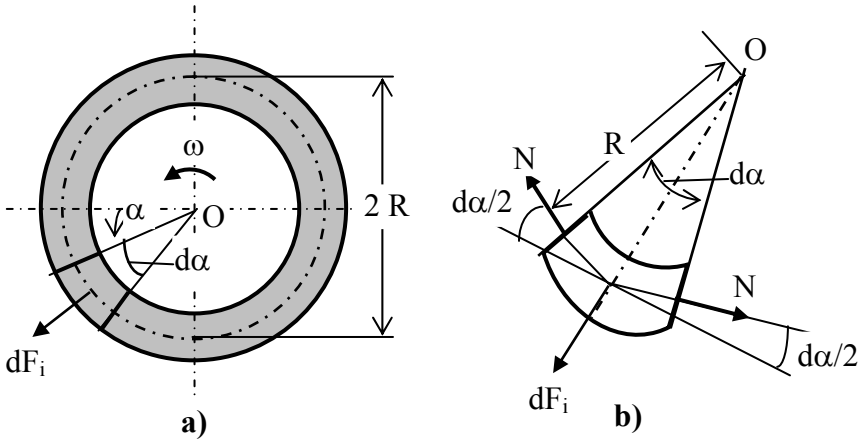


Fig.4.2.2-2

Forța centrifugă ce revine elementului izolat este:

$$dF_i = a \cdot dm = \frac{\gamma}{g} \cdot R^2 \cdot \omega^2 \cdot A \cdot d\alpha \qquad 4.2.2\text{-}2$$

unde:

A – aria secțiunii transversale a obadei

γ - greutatea specifică a materialului

Pentru elementul izolat (Fig.4.2.2-2b), condiția de echilibru conduce la relația:

$$dF_i = 2\,N \sin\frac{d\alpha}{2} \approx N \cdot d\alpha \qquad 4.2.2\text{-}3$$

de unde se obține expresia efortului axial din secțiunea obadei:

$$N = \frac{dF_i}{d\alpha} = \frac{\gamma}{g} \cdot A \cdot (R \cdot \omega)^2 = \frac{\gamma}{g} \cdot A \cdot v^2 \qquad 4.2.2\text{-}4$$

În relația 4.2.2-4

$$v = R \cdot \omega \qquad 4.2.2\text{-}5$$

şi reprezintă viteza medie a obadei.

Forța axială produce în secțiunea transversală a obadei tensiunea normală:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{\gamma}{g} \cdot v^2 \qquad 4.2.2\text{-}6$$

Din relația 4.2.2-6 se observă că tensiunea este independentă de mărimea secțiunii transversale a obadei. Asta înseamnă că obada nu poate fi dimensionată din condiția de rezistență.

În mişcarea de rotație obada înmagazinează energie cinetică şi ca urmare dimensionarea acesteia se va face pe baza acestui criteriu. Din relația 4.2.2-6 se va determina atunci viteza maximă admisă a obadei astfel încât tensiunea normală rezultată să nu depăşească pe cea admisibilă. Rezultă atunci:

$$v \le \sqrt{\frac{\sigma_a \cdot g}{\gamma}} \qquad 4.2.2\text{-}7$$

Viteza volantului depinde de natura materialului din care este confecționat şi nicidecum de dimensiunile sale.

Pentru un volant realizat din fontă pentru care γ = 7,25 daN/dm^3 şi σ_a = *67 daN/cm*^{2} rezultă o viteză $v \le 30$ *m/s*.

Sub acțiunea forțelor centrifuge (a efortului axial) obada se deformează, se lungeşte. Cantitatea cu care se lungeşte obada rezultă relativ uşor, deoarece deformațiile specifice ε sunt constante:

$$\Delta l = \varepsilon \cdot l = \frac{\sigma}{E} \cdot l = \frac{1}{E} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 R^2 \cdot 2\pi \cdot R = 2\pi R \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{v^2}{E} \qquad 4.2.2\text{-}8$$

Datorită acestei lungiri a obadei, raza medie a acesteia creşte cu cantitatea:

$$\Delta R = \frac{\Delta l}{2\pi} = \frac{\sigma \cdot R}{E} = \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{v^2 \cdot R}{E} \qquad 4.2.2\text{-}9$$

4.2.3 Calculul barei în mişcare de rotație în juriul unei axe perpendiculare pe planul său

Se consideră o bară de secțiune variabilă care se roteşte cu viteză unghiulară ω constantă, în jurul unei axe perpendiculare pe planul său (Fig.4.2.3-1).

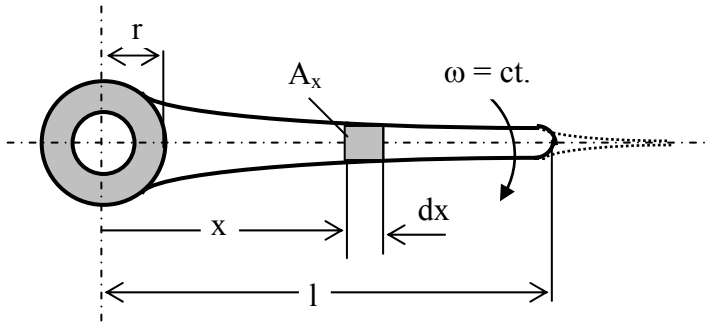


Fig.4.2.3-1

În timpul mişcării de rotație, în bară apar forțe de inerție centrifugale, care supun bara la întindere. Unui element de lungime *dx* din bară, îi corespunde forța de inerție elementară:

$$dF_i = a\,dm = \omega^2 x \cdot \frac{\gamma}{g} A_x\,dx = \omega^2 \frac{\gamma}{g} \cdot A_x\,x\,dx \qquad 4.2.3\text{-}1$$

În secțiunea situată la distanța *x* de centrul de rotație, efortul axial din secțiunea transversală a barei este:

$$N = \frac{\gamma}{g} \omega^2 \int_x^l A_x\,x\,dx \qquad 4.2.3\text{-}2$$

iar tensiunea normală rezultată are expresia:

$$\sigma = \frac{N}{A_x} = \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{A_x} \cdot \int_x^l A_x \, x \, dx \qquad 4.2.3\text{-}3$$

Se pot întâlni două situații:

- *bara are secțiune constantă*. În această situație integrala relației 4.2.3-3 este uşor de rezolvat şi se obține pentru tensiunea normală expresia:

$$\sigma = \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{2} \cdot \left(l^2 - x^2\right) \qquad 4.2.3\text{-}4$$

Tensiunea maximă se obține din relația 4.2.3-4 când *x = r:*

$$\sigma = \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{2} \cdot \left(l^2 - r^2\right) \qquad 4.2.3\text{-}5$$

- *bara este de egală rezistență* (elicea de avion). Solicitarea elementului izolat din bară este prezentată în Fig.4.2.3-2.

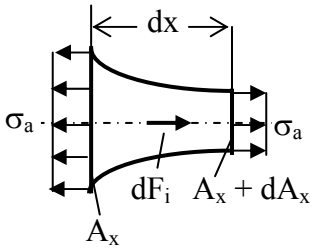


Fig.4.2.3-2

Punând condiția de echilibru pentru elementul din Fig.4.2.3-3, ca o sumă de forțe pe orizontală se obține:

$$(\sum F)_x = 0 \;\Rightarrow\; -\sigma_a A_x + dF_i + \sigma_a \left(A_x + dA_x\right) = 0$$

După înlocuirea forței de inerție elementare cu mărimea

$$dF_i = \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \cdot A_x \cdot x \cdot dx$$

şi efectuarea calculelor, rezultă următoarea expresie:

$$\frac{dA_x}{A_x} = -\frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{\sigma_a} \cdot x \cdot dx$$

iar după integrare se obține ecuația:

$$\ln A_x = -\frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{\sigma_a} \cdot \frac{x^2}{2} + C \qquad 4.2.3\text{-}6$$

Constanta de integrare *C* se determină impunând ca la *x* = *r* aria secțiunii transversale a barei să fie A_0. Atunci relația 4.2.3-6 devine:

$$\ln A_0 = -\frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{\sigma_a} \cdot \frac{r^2}{2} + C$$

de unde se obține:

$$C = \ln A_0 + \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{\omega^2}{\sigma_a} \cdot \frac{r^2}{2} \qquad 4.2.3\text{-}7$$

Înlocuind expresia constantei *C* în relația 4.2.3-6 şi efectuând calculele se ajunge în final la expresia legii de variație a secțiunii transversale a barei:

$$A_x = A_0 \cdot e^{-\frac{\gamma}{2g} \cdot \frac{\omega^2}{\sigma_a} \cdot \left(x^2 - r^2\right)} \qquad 4.2.3\text{-}8$$

Se observă că la bara de egală rezistență care se roteşte în jurul unui ax perpendicular pe planul său, aria secțiunii transversale variază după o funcție exponențială. În Fig.4.2.3-1, s-a anticipat această variație şi bara a fost reprezentată cu secțiune variabilă în această ipoteză.

Secțiunea barei este maximă pentru *x* = *r* şi minimă pentru *x* = *l*.

4.2.4 Calculul bielei motoare

Biela motoare este o componentă a mecanismului bielă-manivelă. Acest tip de mecanism, are o mare răspândire în construcția de maşini, transformând mişcarea rectilinie în mişcare de rotație sau mişcarea de rotație în una rectilinie. În Fig.4.2.4-1 se prezintă schematic mecanismul bielă-manivelă. Manivela execută o mişcare de rotație în jurul unui ax de cele mai multe ori cu viteză unghiulară ω constantă, iar biela execută o mişcare plană.

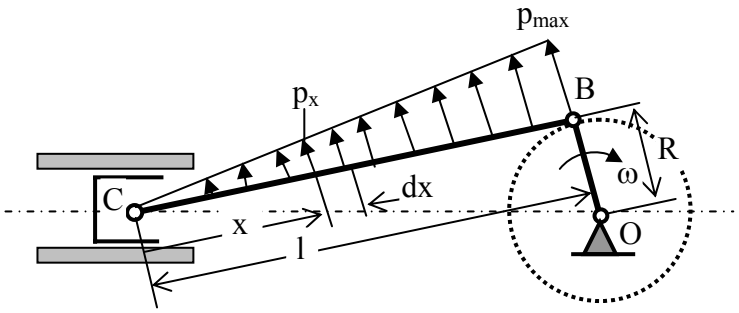


Fig.4.2.4-1

Cea mai periculoasă poziție este aceea când biela *BC* este perpendiculară pe manivela *OB*. În această poziție punctul *B* de articulație între bielă şi manivelă, are accelerația:

$$a = R \cdot \omega^2 \qquad 4.2.4\text{-}1$$

Punctul *C* are în această poziție o accelerație care poate fi considerată nulă şi considerând că accelerația secțiunilor transversale ale bielei între punctele *C* şi *B* este liniară, rezultă că la distanța *x* de punctul *C*, accelerația este:

$$a_x = a \cdot \frac{x}{l} = R \cdot \omega^2 \cdot \frac{x}{l} \qquad 4.2.4\text{-}2$$

Forța de inerție repartizată pe elementul de lungime *dx* este atunci:

$$dF_i = a_x \cdot dm = \frac{\gamma}{g} \cdot A\,dx \cdot R\,\omega^2 \cdot \frac{x}{l} = \frac{\gamma}{g} \cdot A \cdot \frac{R\,\omega^2}{l} \cdot x\,dx \qquad 4.2.4\text{-}3$$

unde

A – aria secțiunii transversale a bielei.

Forța de inerție dF_i acționează ca o sarcină distribuită. Sarcina distribuită p_x ce acționează pe unitatea de lungime a bielei este atunci egală cu:

$$p_x = \frac{dF_i}{dx} = \frac{\gamma}{g} \cdot A \cdot R \cdot \omega^2 \cdot \frac{x}{l} \qquad 4.2.4\text{-}4$$

şi are o variație liniară în lungul bielei. Pentru $x = 0$ rezultă $p_x = 0$, iar pentru $x = l$ se obține valoarea maximă (Fig.4.2.4-1):

$$p_{max} = \frac{\gamma}{g} \cdot A \cdot R \cdot \omega^2 \qquad 4.2.4.5$$

Sarcina distribuită p supune biela la o solicitare de încovoiere (Fig.4.2.4-2).

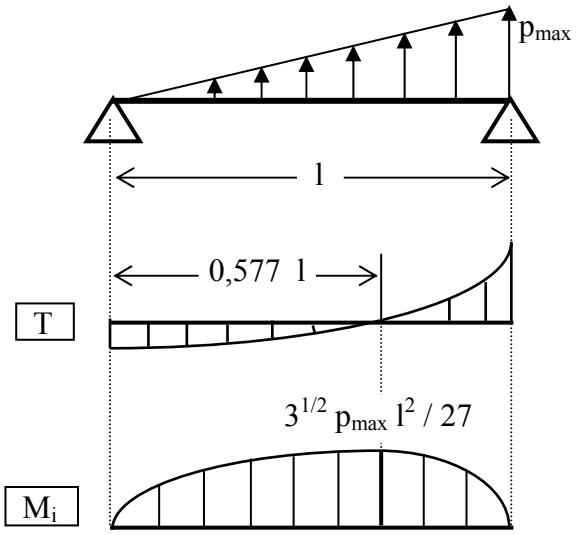


Fig.4.2.4-2

Momentul încovoietor maxim se produce la distanța $x = 0,577\ l$ şi are valoarea:

$$M_{i\,max} = \frac{p_{max} \cdot l^2}{9 \cdot \sqrt{3}} = \frac{R \cdot \omega^2 \cdot A}{9 \cdot \sqrt{3}} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot l^2 \qquad 4.2.4\text{-}6$$

iar tensiunea normală din secțiunea periculoasă este:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{i\,max}}{W_z} = \frac{R \cdot \omega^2 \cdot A}{9 \cdot \sqrt{3}} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \frac{l^2}{W_z} \qquad 4.2.4\text{-}7$$

Tensiunea normală maximă depinde atât de viteza unghiulară ω, aria secțiunii transversale A, cât şi de modulul de rezistență W_z .

4.3 SOLICITĂRI PRODUSE DE VARIAȚII RAPIDE ALE ACCELERAȚIEI

4.3.1 Considerații generale

Asemenea solicitări sunt frecvente în practică şi ele apar în special atunci când două corpuri se ciocnesc. În vecinătatea locului de contact corpurile suferă deformații elastice sau plastice. La solicitările prin şoc, starea de solicitare are o componentă locală în jurul zonei de contact şi una generală determinată de propagarea efectului şocului în toată masa corpului lovit. Ca urmare, elementele corpului se pun în mişcare efectuând o mişcare oscilatorie amortizată. Din acest punct de vedere, solicitarea prin şoc este deosebit de complexă, motiv pentru care în general problema şocului se abordează cu metode aproximative, care însă conduc la valori ale tensiunilor mai mari decât cele reale.

De cele mai multe ori, în practică ciocnirea se realizează între două corpuri, unul aflat în mişcare (care loveşte) şi unul în repaus (cel lovit). Dacă cel lovit îl opreşte pe cel care loveşte, atunci o soluționare aproximativă a şocului se obține pe baza *legii conservării energiei.*

Înainte de ciocnire, corpul aflat în mişcare are o energie cinetică:

$$E_c = \int_m \frac{1}{2} v^2 \, dm \qquad 4.3.1\text{-}1$$

unde:

v – viteza unui element al corpului aflat în mişcare

m – masa elementului aflat în mişcare

Dacă acel corp de masă m se află în mişcare de translație, energia cinetică pe care o posedă este:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \qquad 4.3.1\text{-}2$$

iar dacă se află în mişcare de rotație în jurul unei axe fixe

$$E_c = \frac{1}{2} J \omega^2 \qquad 4.3.1\text{-}3$$

unde

J – momentul de inerție masic al corpului

ω - viteza unghiulară a corpului aflat în mişcare de rotație.

Când corpul de greutate Q cade, după parcurgerea unei distanțe (înălțime) h, energia lui cinetică este:

$$E_c = Q \cdot h \qquad 4.3.1\text{-}4$$

Metoda aproximativă cea mai utilizată în abordarea şocului se bazează pe legea conservării energiei care precizează că în momentul ciocnirii, energia cinetică E_c a corpului care loveşte se transformă integral în energie de deformație U_d :

$$E_c = U_d \qquad 4.3.1\text{-}5$$

În urma ciocnirii ambele corpuri suferă deformații şi ca urmare, relația 4.3.1-5 are forma:

$$E_c = U_{d1} + U_{d2} \qquad 4.3.1\text{-}6$$

unde

U_{d1} – energia de deformație a corpului care loveşte

U_{d2} – energia de deformație a corpului lovit.

În majoritatea cazurilor deformarea suferită de corpul care loveşte este mică în comparație cu cea a corpului lovit şi ca urmare energia U_{d1} se neglijează.

Elementele de rezistență care în timpul şocului suferă deformații mari, au o comportare la şoc mult mai bună decât cele care sunt rigide. De aceea, elementele de rezistență supuse posibilității solicitărilor prin şoc trebuie astfel concepute încât deformarea lor să fie cât mai mare posibil.

4.3.2 Întinderea (compresiunea) prin şoc

Se consideră o bară de lungime *l,* cu secțiune constantă, înțepenită la un capăt, solicitată de o greutate *Q* care cade de la înălțimea *h* pe un opritor aşezat în capătul liber al barei (Fig.4.3.2-1).

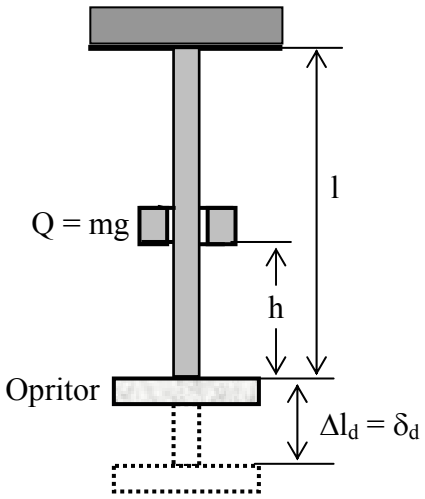


Fig.4.3.2-1

Energia de deformație a greutății care cade se neglijează. În momentul şocului bara se deformează suferind o lungire dinamică $\Delta l_d = \delta_d$. Energia cinetică pe care o are greutatea în momentul şocului se transformă în energie de deformație a barei:

$$E_c = mg \cdot (h + \delta_d) = \frac{N_d^2 \cdot l}{2EA} \qquad 4.3.2\text{-}2$$

unde

m – masa greutății care cade
g – accelerația gravitațională
N_d – efortul axial din bară în momentul şocului (efortul axial dinamic)
A – aria secțiunii transversale a barei.

Dacă se înlocuieşte lungirea dinamică δ_d

$$\delta_d = \frac{N_d \cdot l}{EA} \qquad 4.3.2\text{-}3$$

în relația 4.3.2-3 se obține:

$$\frac{N_d^2 \cdot l}{2EA} - mg \cdot \frac{N_d \cdot l}{EA} - mgh = 0 \qquad 4.3.2\text{-}4$$

şi este o ecuație de gradul doi în raport cu efortul axial dinamic N_d. Rezolvată această ecuație, rezultă pentru efortul axial din momentul şocului expresia:

$$N_d = mg \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2EAh}{mgl}}\right) = Q \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2EAh}{mgl}}\right) \qquad 4.3.2\text{-}5$$

Expresia

$$\psi_d = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2EAh}{mgl}}\right) = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\frac{mgl}{EA}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\frac{Ql}{EA}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}} \qquad 4.3.2\text{-}6$$

poartă numele de *multiplicator de şoc* sau *coeficient dinamic la şoc*.
Rezultă atunci că efortul axial dinamic din bara solicitată la şoc, are expresia:

$$N_d = Q\psi_d = N_{st} \cdot \psi_d \qquad 4.3.2\text{-}7$$

În expresia 4.3.2-6:

δ_{st} – este deplasarea (statică) secțiunii de impact sub acțiunea greutății aplicată ca o forță statică în această secțiune

N_{st} – efortul axial din bară când greutatea este aplicată ca o forță statică în secțiunea de impact.

După cum se poate constata, multiplicatorul de şoc este supraunitar. Atunci când $h = 0$ (greutatea nu are înălțime de cădere ci se aplică ca un impuls puternic), rezultă că valoarea minimă a multiplicatorului de şoc este $\psi = 2$, adică în momentul şocului efortul axial creşte de cel puțin două ori. De aici se vede clar cât de periculos poate fi şocul pentru elementele de rezistență.

De asemenea, din relația 4.3.2-6 se constată că micşorarea deplasării statice (δ_{st}) a secțiunii de impact conduce la o mărire semnificativă a multiplicatorului de şoc şi invers.

Tensiunea normală din momentul şocului (dinamică) din bară este dată de relația:

$$\sigma_d = \frac{N_d}{A} = \frac{N_{st}}{A} \cdot \psi_d = \sigma_{st} \cdot \psi_d \qquad 4.3.2\text{-}8$$

adică tensiunea normală din momentul şocului este egală cu tensiunea statică (produsă de sarcina aplicată static) înmulțită cu multiplicatorul de şoc.

La fel se poate arăta că în momentul şocului şi deformațiile se multiplică cu valoarea multiplicatorului de şoc:

$$\Delta l_d = \Delta l_{st} \cdot \psi_d \qquad 4.3.2\text{-}9$$

În concluzie, în momentul şocului, efortul axial, tensiunea normală şi lungirea sau scurtarea barei se obțin prin înmulțirea aceloraşi mărimi calculate în regim static cu multiplicatorul de şoc:

$$\begin{aligned} N_d &= N_{st} \cdot \psi_d \\ \sigma_d &= \sigma_{st} \cdot \psi_d \\ \Delta l_d &= \Delta l_{st} \cdot \psi_d \end{aligned} \qquad 4.3.2\text{-}10$$

Este foarte important de evidențiat faptul că pentru toate mărimile din relația 4.3.2-10 există un *singur multiplicator de şoc* şi care se calculează cu relația

$$\psi_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}} \qquad 4.3.2\text{-}11$$

Când înălțimea de cădere *h* este mare în raport cu deplasarea statică δ_{st}, se poate utiliza pentru multiplicatorul de şoc relația aproximativă:

$$\psi_d \approx \sqrt{1+\frac{2h}{\delta_{st}}} \qquad 4.3.2\text{-}12$$

Calculul de rezistență impune satisfacerea condiției:

$$\sigma_{d\,max} = \sigma_{st\,max} \cdot \psi_d \le \sigma_a \qquad 4.3.2\text{-}13$$

Calculul la compresiune prin şoc se efectuează la fel ca şi pentru tracțiunea prin şoc.

4.3.3 Încovoierea prin şoc (încovoierea dinamică)

Fie o grindă de rigiditate constantă, pe capătul căreia de la înălțimea *h* cade o greutate *Q* de masă *m* (Fig.4.3.3-1).

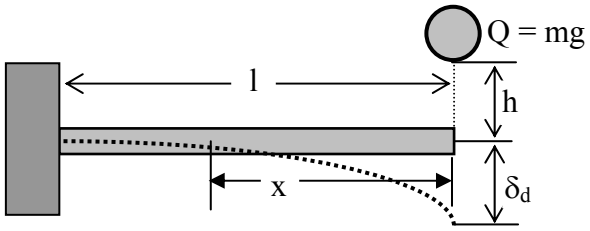


Fig.4.3.3-1

Căderea greutății *Q* este echivalentă cu aplicarea unei forțe dinamice F_d pe capătul barei şi care la rândul ei, determină în bară un moment încovoietor dinamic M_{id}:

$$M_{id} = F_d \cdot x \qquad 4.3.3\text{-}1$$

Egalăm şi în acest caz energia cinetică (egală cu lucrul mecanic efectuat) a greutății din momentul ciocnirii cu energia de deformație a grinzii:

$$mg \cdot (h+\delta_d) = \frac{1}{2} \cdot \int_0^l \frac{M_{id}^2}{E\,I_z}\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{F_d^2 \cdot l^3}{3\,E\,I_z} \qquad 4.3.3\text{-}2$$

Dacă se are în vedere că

$$\delta_d = \frac{F_d \cdot l^3}{3\,E\,I_z} \qquad 4.3.3\text{-}3$$

relația 4.3.3-2 conduce la expresia:

$$mgh + \frac{F_d \cdot l^3}{3\,E\,I_z} \cdot mg = \frac{F_d^2 \cdot l^3}{6\,E\,I_z}$$

de unde rezultă ecuația de gradul doi în F_d :

$$F_d^2 - 2\,m\,g \cdot F_d - \frac{6\,m\,g\,h\,E\,I_z}{l^3} = 0 \qquad 4.3.3\text{-}4$$

Rezolvând ecuația 4.3.3-4, se obține expresia forței dinamice:

$$F_d = m\,g \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2\,h}{\frac{m g l^3}{3\,E\,I_z}}}\right) = Q \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2\,h}{\delta_{st}}}\right) = Q \cdot \psi_d \qquad 4.3.3\text{-}5$$

unde

ψ_d – multiplicator de şoc la încovoiere şi are aceiaşi expresie ca la întinderea prin şoc. Mărimile din expresia multiplicatorului de şoc au aceiaşi semnificația ca la tracțiunea prin şoc.

Forța dinamică în cazul încovoierii se determină prin înmulțirea celei statice cu multiplicatorul de şoc.

Tensiunea normală dinamică pentru încovoierea cu şoc se determină cu ajutorul relației de la încovoiere:

$$\sigma_{d\,max} = \frac{M_{id\,max}}{W_{z\,min}} = \frac{F_d \cdot l}{W_{z\,min}} = \frac{F_{st} \cdot l \cdot \psi_d}{W_{z\,min}} = \frac{M_{ist}}{W_{z\,min}} \cdot \psi_d$$
$$\Rightarrow \quad \sigma_{d\,max} = \sigma_{st\,max} \cdot \psi_d \qquad 4.3.3\text{-}6$$

şi este produsul dintre tensiunea statică şi multiplicatorul de şoc.

La fel şi săgeata sau rotirea unei secțiuni în momentul şocului sunt egale cu produsul dintre mărimile statice şi multiplicatorul de şoc.

În final, pentru încovoierea prin şoc, în momentul impactului se produc mărimile dinamice:

$$M_{id} = M_{ist} \cdot \psi_d$$
$$\sigma_d = \sigma_{st} \cdot \psi_d \qquad 4.3.3\text{-}7a$$

$$v_d = v_{st} \cdot \psi_d$$
$$\varphi_d = \varphi_{st} \cdot \psi_d \qquad 4.3.3\text{-}7b$$

unde.

$$\psi_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}} \approx \sqrt{1 + \frac{2h}{\delta_{st}}} \qquad 4.3.3\text{-}8$$

Calculul de rezistență impune îndeplinirea condiției:

$$\sigma_{d\,max} = \sigma_{st\,max} \cdot \psi_d \le \sigma_a \qquad 4.3.3\text{-}9$$

Tensiunea normală produsă în timpul şocului este cu atât mai mică cu cât volumul corpului lovit este mai mare, adică cu cât corpul lovit are capacitatea înmagazinării unei cantități mai mari de energie de deformație.

Dacă masa corpului lovit este aproximativ de acelaşi ordin de mărime cu a corpului care loveşte, atât pentru întinderea cât şi pentru încovoierea prin şoc, este necesar ca în calcule să se țină seama şi de inerția corpului lovit.

4.3.4 Torsiunea prin şoc (torsiunea dinamică)

Se consideră un arbore de secțiune circulară pe care este situat un volant de greutate *Q* şi diametru *D* (Fig.4.3.4-1).

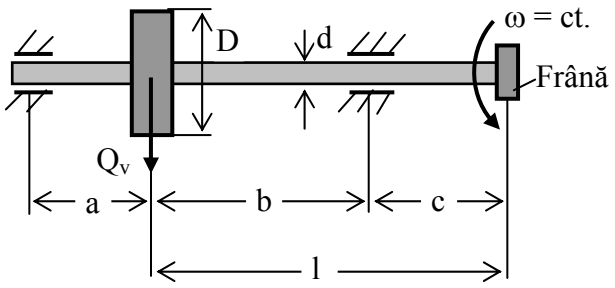


Fig.4.3.4-1

Arborele se roteşte cu viteza unghiulară ω constantă. La un moment dat, arborele este oprit brusc (în timp foarte scurt) cu ajutorul unei frâne montată pe arbore. Energia cinetică a volantului se transformă în energie de deformație pentru porțiunea dintre volant şi frâna arborelui.

Energia cinetică a arborelui este:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot J_v \, \omega^2 \qquad 4.3.4\text{-}2$$

unde

J_v – momentul de inerție masic al volantului şi care este:

$$J_v = \frac{Q_v}{8g} \cdot D^2 \qquad 4.3.4\text{-}3$$

Egalând energia cinetică a volantului cu energia de deformație a arborelui se obține momentul de torsiune dinamic M_{td}:

$$\frac{1}{2} \cdot J_v \, \omega^2 = \frac{M_{td}^2 \cdot l}{2 G I_p} \Rightarrow M_{td} = \omega \cdot \sqrt{\frac{G I_p J_v}{l}} \qquad 4.3.4\text{-}4$$

Tensiunea tangențială dinamică maximă din arbore se determină cu relația cunoscută:

$$\tau_{max} = \tau_d = \frac{M_{td}}{I_p} \cdot \frac{d}{2} = \frac{\omega d}{2 I_p} \cdot \sqrt{\frac{G I_p J_v}{l}} = \omega \cdot \sqrt{\frac{2}{\frac{\pi d^2}{4}} \cdot \frac{G J_v}{l}} =$$

$$= \omega \cdot \sqrt{\frac{2 G J_v}{A l}} = \omega \cdot \sqrt{\frac{2 G J_v}{V_a}} \qquad 4.3.4\text{-}5$$

unde,

V_a – volumul arborelui care a înmagazinat energia de deformație

Se poate observa că volumul arborelui influențează mărimea tensiunii tangențiale la oprirea rapidă a acestuia. Un volum mare (lungime sau diametru mare) conduce la o micşorare a valorii tensiunii tangențiale dinamice.

Dacă se ține seama de expresia momentului de inerție masic J_v al volantului (relația 4.3.4-3), expresia tensiunii tangențiale dinamice maxime este:

$$\tau_{max} = \omega \cdot \sqrt{\frac{2G}{\frac{\pi d^2}{4} \cdot l} \cdot \frac{Q_v}{8g} \cdot D^2} = \omega \cdot \frac{D}{d} \cdot \sqrt{\frac{G Q_v}{\pi \cdot l}}$$

$$\Rightarrow \quad \tau_{max} = \omega \cdot \frac{D}{d} \cdot \sqrt{\frac{G Q_v}{\pi \cdot l}} \qquad 4.3.4\text{-}6$$

4.3.5 Calculul arcului elicoidal cu spire strânse solicitat la şoc

Pe un arc elicoidal cu *n* spire strânse, raza de înfăşurare *R,* diametrul sârmei de înfăşurare *d*, cade o greutate *Q* de la înălțimea *h* (Fig.4.3.5-1). În momentul şocului sârma arcului este solicitată la forfecare (vezi calculul arcului elicoidal cu spire strânse) şi torsiune. Pentru solicitarea prin şoc se neglijează forfecarea.

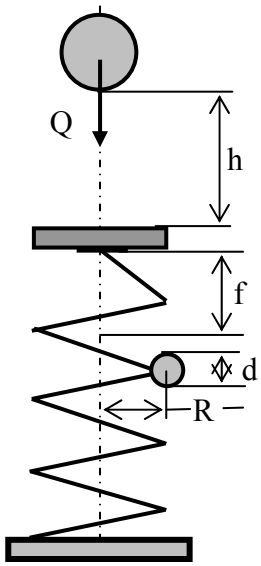


Fig.4.3.5-1

Energia cinetică a greutății *Q* în momentul şocului este egală cu:

$$E_c = Q \cdot (h + f) \qquad 4.3.5\text{-}1$$

unde

f – săgeata arcului ca urmare a ciocnirii.

Forța dinamică F_d care apare în arc în momentul şocului produce un moment de torsiune

$$M_{td} = F_d \cdot R \qquad 4.3.5\text{-}2$$

Energia de deformație înmagazinată în arc se determină funcție de momentul de torsiune:

$$U_d = \frac{M_{td}^2 \cdot l}{2\,G\,I_p} = \frac{32 \cdot F_d^2 \cdot R^3 \cdot n}{G\,d^4} = \frac{F_d^2}{k} \qquad 4.3.5\text{-}3$$

unde s-a notat:

$$k = \frac{G \cdot d^4}{32 \cdot R^3 \cdot n} \qquad 4.3.5\text{-}4$$

Egalând energia cinetică a greutății (relația 4.3.5-1) cu energia de deformație a arcului (relația 4.3.5-3) şi ținând seama de expresia săgeții arcului

$$f = \frac{64 \cdot F_d \cdot R^3 \cdot n}{G \cdot d^4} \qquad 4.3.5\text{-}5$$

se obține relația:

$$Q \cdot \left(h + 2 \cdot \frac{F_d}{k} \right) = \frac{F_d^2}{k} \qquad 4.3.5\text{-}6$$

care este o ecuație de gradul doi în F_d :

$$F_d^2 - 2\,Q \cdot F_d - k \cdot Q \cdot h = 0 \qquad 4.3.5\text{-}7$$

Rezolvarea ecuației 4.3.5-7, conduce pentru forța dinamică din arc la următoarea expresie:

$$F_d = Q + \sqrt{Q^2 + k \cdot h \cdot Q} \qquad 4.3.5\text{-}8$$

de unde momentul de torsiune dinamic este:

$$M_{td} = R \cdot (Q + \sqrt{Q^2 + k \cdot h \cdot Q}) \qquad 4.3.5\text{-}9$$

care produce tensiunea tangențială maximă:

$$\tau_{max} = \frac{M_{td}}{W_p} = \frac{16 \cdot M_{td}}{\pi \cdot d^3} = \frac{16 \cdot R}{\pi \cdot d^3} \cdot \left(Q + \sqrt{Q^2 + k \cdot h \cdot Q} \right) \qquad 4.3.5\text{-}10$$

Dacă înălțimea de cădere a greutății este mare în raport cu săgeata arcului, se poate considera că tensiunea tangențială maximă din arc are expresia:

$$\tau_{max} \approx \frac{16 \cdot R}{\pi \cdot d^3} \cdot \sqrt{k \cdot h \cdot Q} = \sqrt{\frac{8 \cdot h \cdot Q \cdot G}{\pi^2 \cdot d^2 \cdot R \cdot n}} \qquad 4.3.5\text{-}11$$

Şi în acest caz, tensiunea tangențială scade cu creşterea volumului arcului.

4.3.6 Efectul masei corpului lovit asupra solicitării prin şoc

Dacă masa corpului lovit este de acelaşi ordin de mărime cu cea a corpului care loveşte, atunci este necesar ca în calculele la şoc să se aibă în vedere şi inerţia corpului lovit.

În toate cazurile prezentate anterior, la stabilirea multiplicatorului de şoc s-a neglijat energia cinetică pe care o primeşte masa corpului lovit.

Efectul masei corpului lovit asupra solicitării prin şoc se tratează pe un caz particular şi anume al şocului axial de întindere.

Corpul de greutate Q care cade pe bara de greutate Q_b are înainte de şoc viteza

$$v = \sqrt{2\,g\,h} \qquad 4.3.6\text{-}1$$

iar după şoc viteza $v_1 < v$, egală cu viteza capătului lovit al barei (Fig.4.3.6-1).

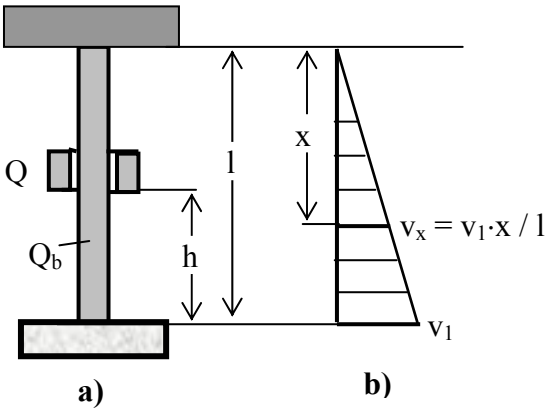


Fig.4.3.6-1

Se poate considera că viteza diferitelor secţiuni creşte de la viteza $v = 0$ (în înţepenire) liniar până la viteza v_1 (în capătul liber al barei). La distanţa x de capătul fix, viteza secţiunii este (din asemănarea triunghiurilor – vezi Fig.4.3.6-1b):

$$v_x = \frac{x}{l} \cdot v_1 \qquad 4.3.6\text{-}2$$

iar energia cinetică a unui element de bară, de lungime dx, situat la distanţa x de capătul fix are expresia:

$$dE_{c1} = \frac{1}{2} \cdot dm \cdot v_x^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot dx \cdot \left(v_1 \cdot \frac{x}{l} \right)^2 \qquad 4.3.6\text{-}3$$

Integrând relația 4.3.6-3 pe toată lungimea barei se obține energia cinetică a barei:

$$E_{c1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma \cdot A}{g} \cdot \frac{v_1^2}{l^2} \cdot \int_0^l x^2 \, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_b}{3g} \cdot v_1^2 \qquad 4.3.6\text{-}4$$

unde

$Q_b = \gamma A\, l$ este greutatea proprie a barei.

Dacă se notează

$$Q_{rb} = \frac{Q_b}{3} \qquad 4.3.6\text{-}5$$

şi numită *greutatea redusă a barei*, atunci energia cinetică a barei (relația 4.3.6-4) poate fi scrisă sub forma:

$$E_{c1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q_{rb}}{g} \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot m_{rb} \cdot v_1^2 \qquad 4.3.6\text{-}6$$

unde

m_{rb} – *masa redusă* a barei.

Coeficientul

$$k = \frac{1}{3} \qquad 4.3.6\text{-}7$$

se numeşte *coeficient de reducere a greutății* sau *a masei barei.*

Se poate acum considera că întreaga masă a barei lovite este m_r şi aceasta se află în punctul unde se produce şocul cu viteza v_1 (deocamdată necunoscută).

Pentru a determina viteza v_1 se scrie teorema conservării impulsului înainte şi după şoc:

$$\frac{Q}{g} v = \left(\frac{Q}{g} + \frac{Q_r}{g} \right) \cdot v_1 = \left(\frac{Q}{g} + \frac{k \cdot Q_b}{g} \right) \cdot v_1 \qquad 4.3.6\text{-}8$$

de unde se obține:

$$v_1 = \frac{Q}{Q + k \cdot Q_b} \cdot v = \frac{v}{1 + \frac{k \cdot Q_b}{Q}} = \frac{\sqrt{2 \cdot g \cdot h}}{1 + \frac{k \cdot Q_b}{Q}} \qquad 4.3.6\text{-}9$$

Energia cinetică totală, a greutății Q şi a greutății reduse Q_r imediat după şoc este:

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q + k\,Q_b}{g} \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q + k\,Q_b}{g} \cdot \left(\frac{Q}{Q + k\,Q_b} \right)^2 \cdot v^2 =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{Q + k\,Q_b}{g} \cdot \frac{Q^2}{(Q + k\,Q_b)^2} \cdot \left(\sqrt{2\,g\,h} \right)^2 = \frac{Q^2}{Q + k\,Q_b} \cdot h \qquad 4.3.6\text{-}10$$

Dacă la această energie se adaugă lucrul mecanic al greutății Q în timpul deformației dinamice δ a barei, se obține energia totală care este cedată barei:

$$E_t = \frac{Q^2}{Q + k\,Q_b} \cdot h + Q \cdot \delta = Q \cdot \left(\frac{h}{1 + \frac{k\,Q_b}{Q}} + \delta \right) \qquad 4.3.6\text{-}11$$

Energia totală cedată barei este acum egalată cu energia de deformație a sa:

$$Q \cdot \left(\frac{h}{1 + \frac{k\,Q_b}{Q}} + \delta \right) = \frac{E \cdot A \cdot \delta^2}{2\,l} \qquad 4.3.6\text{-}12$$

care este o ecuație de gradul doi în δ:

$$\frac{1}{2\,\delta_{st}} \cdot \delta^2 - \delta - \frac{h}{1 + \frac{k\,Q_b}{Q}} = 0 \qquad 4.3.6\text{-}13$$

Rezolvarea ecuație 4.3.6-13 conduce pentru deplasarea dinamică a secțiunii de impact la următoarea expresie:

$$\delta = \delta_{st} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2\,h_r}{\delta_{st}}} \right) = \delta_{st} \cdot \psi_r \qquad 4.3.6\text{-}14$$

unde s-a notat:

$\delta_{st} = \dfrac{Q \cdot l}{E \cdot A}$ - deplasarea statică a secțiunii de impact

$$h_r = \frac{h}{1 + \frac{k Q_b}{Q}}$$ - înălțimea de cădere redusă

$$\psi_r = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h_r}{\delta_{st}}}$$ - multiplicator de şoc redus.

Se poate constata că au rezultat relații asemănătoare cu cele obținute când s-a neglijat masa corpului lovit, cu deosebirea că atunci când se ține seama şi de masa corpului lovit, în relațiile obişnuite de calcul se introduc *mărimile reduse.*

Coeficientul de reducere *k*, depinde de solicitare şi de modul de rezemare al barei. Astfel:

- pentru bara liberă la un capăt şi înțepenită la celălalt, solicitată la şoc axial în capătul liber, *k = 1/3*
- pentru grinda înțepenită la un capăt şi liberă la celălalt, solicitată la şoc transversal în capătul liber, *k = 33 /140*
- pentru bara simplu rezemată solicitată la încovoiere printr-un şoc în secțiunea de la mijlocul deschiderii, *k = 17 /35.*

Tensiunea produsă prin şoc pentru aceste cazuri se va calcula cu relația:

$$\sigma_d = \sigma_{st} \cdot \psi_r \qquad 4.3.6\text{-}15$$

4.4 APLICAȚII

Aplicația 4.4.1. *O greutate Q = 200 daN cade de la înălțimea h = 1 cm pe mijlocul unei grinzi cu deschiderea l = 1 m, confecționată dintr-un profil* **I 10.** *Să se verifice grinda în două situații:*

a) grinda se sprijină pe două reazeme rigide (Fig.4.4.1-1a)

b) grinda se sprijină pe două arcuri elicoidale cu spire strânse, având raza de înfăşurare R = 64 mm, diametrul sârmei d = 16 mm, iar numărul de spire este n = 4 (Fig.4.4.1-1b).

Se mai cunosc: σ_a *= 150 MPa,* τ_a *= 400 MPa, E = 2,1* $\cdot 10^5$ *MPa, G = 8,5*$\cdot 10^4$ *MPa.*

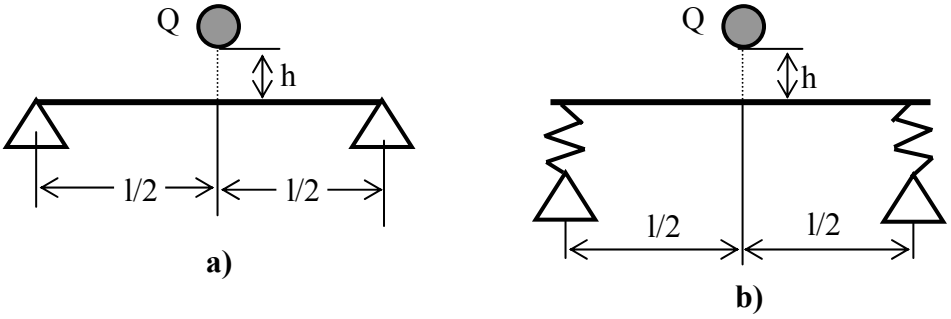


Fig.4.4.1-1

Rezolvare:

a) Momentul încovoietor din secțiunea periculoasă este

$$M_{ix\,max} = \frac{Q \cdot l}{4}$$

iar deplasarea statică din secțiunea de impact este:

$$\delta_{st} = \frac{Q \cdot l^3}{48\,E \cdot I_z} = 0{,}116 \ \text{mm}$$

Multiplicatorul de şoc se calculează cu relația cunoscută

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2\,h}{\delta_{st}}} = 14{,}6$$

Tensiunea normală statică maximă din grindă este:

$$\sigma_{st\,max} = \frac{M_{iz\,max}}{W_{z\,min}} = \frac{Q \cdot l}{4\,W_{z\,min}} = 14{,}6 \ \text{MPa}$$

iar cea dinamică maximă:

$$\sigma_{d\,max} = \sigma_{st\,max} \cdot \psi = 207 \ \text{MPa} > \sigma_a$$

Se constată că tensiunea normală maximă în momentul şocului este mai mare decât cea admisibilă. O soluție practică pentru diminuarea tensiunii este mărirea deplasării secțiunii de impact. aceasta se poate realiza prin aşezarea unor elemente elastice de rezemare.

b) Tensiunea normală statică maximă rămâne aceiaşi de la punctul a).

Se modifică deplasarea statică din secțiunea de impact. Deplasarea determinată de deformarea arcului este:

$$\delta_{st,arc} = \frac{64 \cdot \frac{Q}{2} \cdot R^3 \cdot n}{G \cdot d^4} = 12{,}05 \quad mm$$

iar deplasarea statică totală este:

$$\delta_{st,tot} = \delta_{st} + \delta_{st,arc} = 0{,}116 + 12{,}05 = 12{,}166 \quad mm$$

Multiplicatorul de şoc în acest caz are valoarea

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2\,h}{\delta_{st,tot}}} = 2{,}6$$

care conduce la o tensiune dinamică maximă:

$$\sigma_{d\,max} = \sigma_{st\,max} \cdot \psi = 38{,}4 \ \text{MPa} < \sigma_a$$

Tensiunea normală maximă pentru grinda cu reazeme elastice este mult mai mică decât tensiunea normală maximă pentru grinda rezemată rigid.

Arcul elicoidal este solicitat la torsiune, unde tensiunea tangențială statică maximă este:

$$\tau_{st\,max} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{\frac{Q}{2} \cdot R}{W_p} = 80{,}39 \ MPa$$

care conduce la o valoare dinamică maximă:

$$\tau_{d\,max} = \tau_{st\,max} \cdot \psi = 209 \ \text{MPa} < 400 \ \text{MPa}$$

Aplicația 4.4.2. *Să se calculeze tensiunea maximă din obada unui volant confecționat din oțel (γ = 7,8 daN /dm^3) având diametrul D = 2 m şi care se roteşte cu o turație n = 600 rot/min. Să se calculeze şi creşterea razei volantului. Se cunoaşte E = 2,1·10^5 MPa.*

Rezolvare

Efortul axial care ia naştere în obada volantului este:

$$N = \frac{\gamma \cdot A \cdot \omega^2 \cdot R^2}{g}$$

iar tensiunea normală din obadă are expresia:

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{\gamma \cdot \omega^2 \cdot R^2}{g} = \frac{\gamma \cdot \left(\frac{\pi \cdot n}{30}\right)^2 \cdot R^2}{g} = 29 \ \text{MPa}$$

Creşterea razei se determină cu relaţia cunoscută:

$$\Delta R = \frac{\sigma \cdot R}{E} = 0{,}138 \ \text{mm}$$

Aplicaţia 4.4.3. *Asupra barei cotite din Fig.4.4.3-1a cade o greutate Q = 50 daN pe capătul liber de la înălţimea h = 1,2 cm. Să se verifice grinda cunoscând:* σ_a *= 140 MPa, d = 6 cm, E =* $2{,}1 \cdot 10^5$ *MPa, G =* $8{,}1 \cdot 10^4$ *MPa. Se va utiliza teoria a III-a de rezistenţă.*

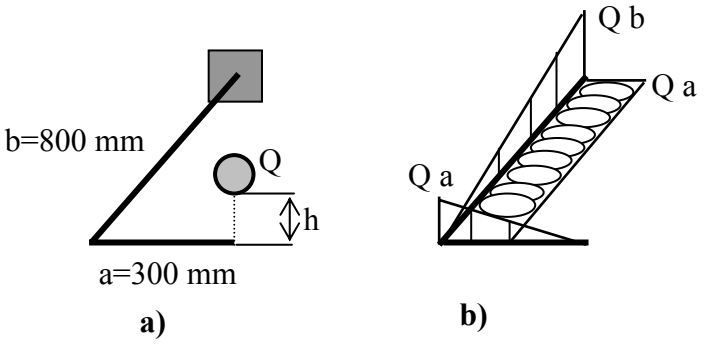


Fig.4.4.3-1

Rezolvare

Diagrama de momente este prezentată în Fig.4.4.3-1b. Secţiunea periculoasă este în încastrare unde se întâlneşte o solicitare compusă de încovoiere cu torsiune. Momentul încovoietor echivalent din secţiunea periculoasă calculat după teoria a III-a de rezistenţă este:

$$M_{echIII} = \sqrt{M_i^2 + M_t^2} = \sqrt{(Q\,a)^2 + (Q\,b)^2} = 4280 \ \text{daN} \cdot \text{cm}$$

iar tensiunea echivalentă are valoarea:

$$\sigma_{st\,max} = \frac{M_{echIII}}{W_z} = 20{,}2 \quad \text{MPa}$$

Deplasarea statică a secțiunii de impact poate fi calculată relativ uşor cu metoda sarcinii unitare:

$$\delta_{st} = \frac{Q \cdot \left(a^3 + b^3\right)}{3\,E\,I_z} + \frac{Q \cdot a^2 \cdot b}{G\,I_p} = 1{,}02 \quad \text{mm}$$

iar multiplicatorul de şoc este:

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{\delta_{st}}} \approx 6$$

Tensiunea echivalentă dinamică maximă este acum:

$$\sigma_{d\,max} = \sigma_{st,max} \cdot \psi = 121{,}2 \quad MPa < \sigma_a$$

Solicitarea prin şoc a barei cotite analizate nu este periculoasă.
În capătul liber al barei se produce o deplasare dinamică maximă:

$$\delta_{d\,max} = \delta_{st} \cdot \psi = 6{,}12 \quad \text{mm}$$

Aplicația 4.4.4-1. *Să se determine înălțimea maximă de la care poate cădea o greutate Q = 100 daN pe platforma unei macarale a cărei schemă constructivă este prezentată în Fig.4.4.4-1. Grinda este de secțiune dreptunghiulară, iar cablul de susținere al platformei are diametrul d = 20 mm. Ambele elemente sunt din oțel pentru care* σ_a *= 150 MPa şi E =* $2{,}1 \cdot 10^5$ *MPa. Cilindrul hidraulic de ridicare a grinzii se consideră rigid în momentul şocului.*

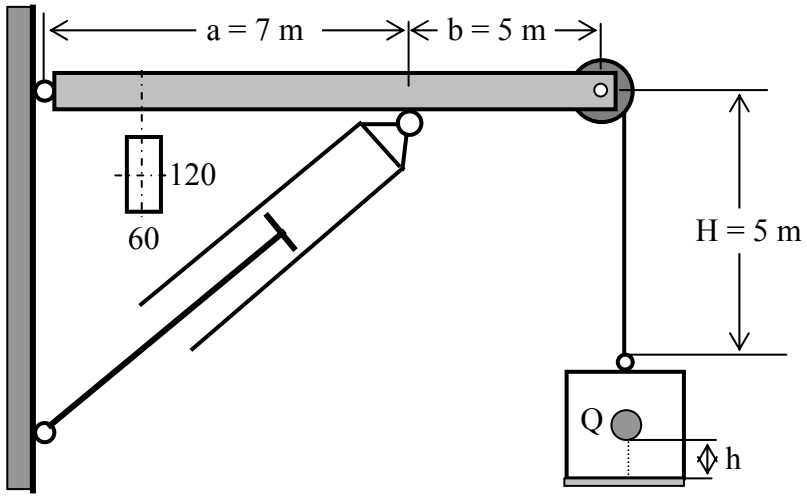


Fig.4.4.4-1

Rezolvare

Sistemul are două elemente care trebuie calculate: *grinda orizontală* şi *cablul de susținere* al platformei.

Cablul este solicitat la întindere. Tensiunea normală statică maximă din cablu este:

$$\sigma_{stcab} = \frac{N}{A_{cab}} = \frac{Q}{A_{cab}} = 3{,}18 \quad \text{MPa}$$

Grinda este solicitată la încovoiere cu momentul maxim în secțiunea de legătură între grindă şi cilindrul hidraulic. Tensiunea normală statică maximă din grindă este:

$$\sigma_{stgr} = \frac{M_{iz\,max}}{W_{z\,min\,gr}} = \frac{Q \cdot b}{W_{z\,min\,gr}} = 34{,}7 \quad \text{MPa} > \sigma_{stcab}$$

Pentru determinarea multiplicatorului de şoc se calculează deplasarea secțiunii de impact (secțiunea de pe platformă).

Deplasarea secțiunii de impact este formată din deplasarea capătului de jos al cablului de susținere al platformei la care se adaogă deplasarea capătului liber al grinzii:

$$\delta_{st} = \Delta l_{cab} + \delta_{stgr}$$

Lungirea cablului de susținere este:

$$\Delta l_{cab} = \frac{Q \cdot H}{E \cdot A_{cab}} = 0{,}075 \ \text{mm}$$

Săgeata capătului liber al grinzii se poate determina cu metoda sarcinii unitare, procedeul Vereşceaghin. Diagramele pentru calculul deplasării sunt prezentate în Fig.4.4.4-2.

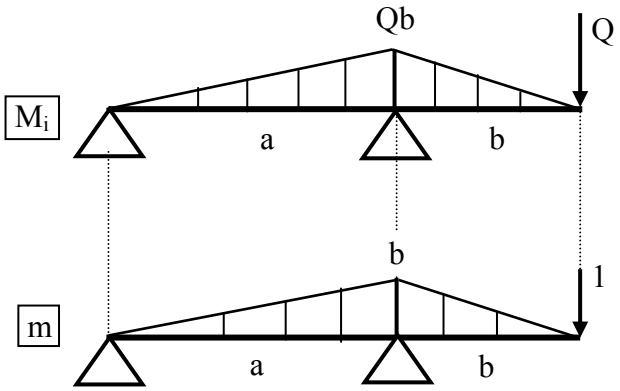


Fig.4.4.4-2

Deplasarea capătului liber al grinzii este:

$$\delta_{stgr} = \frac{1}{E\,I_{zgr}} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot Q\,b \cdot b \cdot \frac{2}{3} \cdot b + \frac{1}{2} \cdot Q\,b \cdot a \cdot \frac{2}{3} \cdot b \right) = \frac{Q\,b^2}{3\,E\,I_{zgr}} \cdot (b + a)$$

$$\delta_{stgr} = \frac{Q \cdot b^2 \cdot (a + b)}{3 \cdot E \cdot I_{zgr}} = 55{,}11 \ \text{mm}$$

Acum deplasarea statică a secțiunii de impact este:

$$\delta_{st} = \Delta l_{cab} + \delta_{stgr} = 55{,}15 \ \text{mm}$$

Se pune condiția de rezistență pentru elementul cel mai periculos, care este grinda:

$$\sigma_{stgr} \cdot \psi = \sigma_a$$

$$\Rightarrow \sigma_{stgr} \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{\delta_{st}}}\right) = \sigma_a$$

sau

$$34{,}7 \cdot \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot h}{55{,}185}}\right) = 150$$

$$\Rightarrow h \approx 277 \quad mm$$

5. SOLICITĂRI VARIABILE

5.1 CICLURI ALE SOLICITĂRILOR VARIABILE

Variația forțelor dacă se produce de un număr mare de ori are o influență defavorabilă asupra caracteristicilor mecanice ale materialelor. Solicitări cu forțe variabile în timp se întâlnesc frecvent în construcția de mașini: mișcarea de rotație și cea de du-te-vino a diferitelor piese etc. Solicitările variabile se pot clasifica după mai multe criterii:

- După modul cum variază în timp pot fi:
  - *periodice*, atunci când se reproduc după intervale de timp regulate
  - *aleatoare,* atunci când nu există o regulă de variație

La rândul lor, solicitările periodice pot fi:

- *staționare*, când tensiunile variază între o limită superioară σ_{max} și una inferioară σ_{min}
- *nestaționare*, când tensiunile își modifică amplitudinea în decursul unei perioade

În cazul solicitărilor staționare, variația tensiunii pornind de la o valoare oarecare și până atinge din nou aceeași valoare și semn, formează *un ciclu al solicitării variabile.* Într-un ciclu, tensiunea trece o singură dată prin valoarea maximă σ_{max} (numită și limita superioară a tensiunii) și prin valoarea minimă σ_{min} (numită și limita inferioară a tensiunii). La fel se întâmplă într-un ciclu și cu tensiunile tangențiale, forțele sau cuplurile.

Se definesc:

- *tensiunea medie a ciclului σ_m,* raportul:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} \qquad 5.1\text{-}1$$

- *amplitudinea ciclului σ_{am},* raportul:

$$\sigma_{am} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \sigma_{max} - \sigma_m = \left|\sigma_{min} - \sigma_m\right| \qquad 5.1\text{-}2$$

de unde rezultă:

$$\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_{am} \quad \text{și} \quad \sigma_{min} = \sigma_m - \sigma_{am} \qquad 5.1\text{-}3$$

- *coeficientul de asimetrie R al ciclului:*

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \qquad 5.1\text{-}4$$

- *perioada ciclului* este intervalul de timp scurs între atingerea aceleiaşi valori a tensiunii şi de acelaşi semn

- După *mărimea coeficientului de asimetrie*, ciclurile de solicitare pot fi:
  - *cicluri simetrice,* pentru care:

$$\sigma_{max} = -\sigma_{min}, \quad \sigma_m = 0, \quad \sigma_{am} = \sigma_{max}, \quad R = -1 \qquad 5.1\text{-}5a$$

  - *cicluri asimetrice, $R \neq -1$*
- După semnul algebric al tensiunii, ciclurile sunt:
  - *alternante* (tensiunile limită au semne contrare), $R < 0$
  - *cicluri oscilante* (tensiunea are un singur semn)

Ciclurile oscilante la rândul lor, pot fi:

- *pozitive* (ambele tensiuni limită sunt pozitive), $0 < R < +1$
- *negative,* (ambele tensiuni limită sunt negative), $+1 < R < +\infty$
- *pulsante,* (una din tensiunile limită este nulă), $R = 0$

Dacă amplitudinea ciclului este mică şi se poate neglija, solicitarea este una *statică* ($\sigma_{max} = \sigma_{min} = \sigma_m$, $\sigma_{am} = 0$, $R = +1$).

În Fig.5.1-1 se prezintă elementele unui ciclu de solicitare (unul alternant pozitiv. Celelalte cicluri rezultă uşor din acesta pe baza considerentelor prezentate la clasificarea lor.

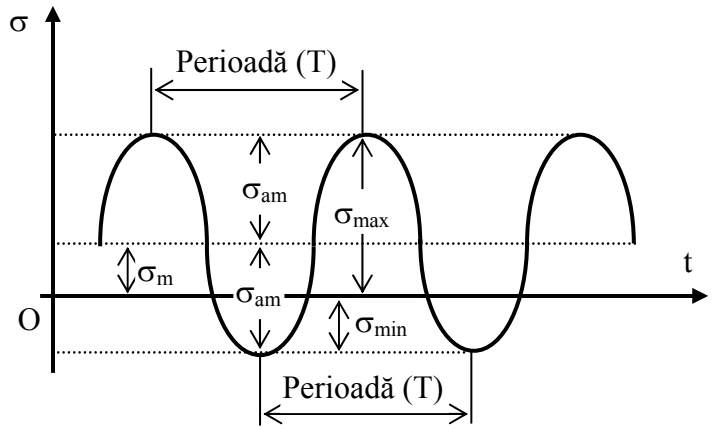


Fig.5.1-1

5.2 OBOSEALA MATERIALELOR. RUPEREA PRIN OBOSEALĂ

Comparativ cu solicitările statice, solicitările variabile repetate de un număr mare de ori, au un efect nefavorabil asupra capacității de rezistență a materialului din care sunt confecționate elementele de rezistență. Aşa au apărut ruperi neaşteptate la multe organe de maşini cum ar fi: arbori cotiți, roți dințate, bolțuri de piston, arcuri de supapă etc, cu toate că din punct de vedere al rezistenței materialelor au fost calculate corect. Ruperile au avut loc la valori mult mai mici ale tensiunii corespunzătoare stărilor limită pentru solicitarea statică. Acest fenomen de rupere prematură, la tensiuni sub cele limită, este cunoscut sub numele de *oboseala materialelor.* Cercetările experimentale efectuate timp îndelungat au scos în evidență că un organ de maşină care suportă static foarte bine o tensiune σ_{max}, dacă este solicitată variabil repetat, cedează după un timp la o tensiune mai mică decât cea maximă de la solicitarea statică ($\sigma < \sigma_{max}$). Un caz clasic de astfel de organ de maşină este osia vagoanelor de cale ferată. Acestea rotindu-se în timpul mersului, o fibră în timpul unei rotații complete trece de la o valoare maximă a tensiunii normale la una minimă. În decursul timpului, se efectuează un număr foarte mare de cicluri şi cu amplitudine diferită (vagonul nu este totdeauna la fel de încărcat).
Cu cât tensiunea maximă din piesă este mai mare, cu atât ruperea prin oboseală are loc la un număr mai mic de cicluri. Dacă tensiunea are valori mici, nu se mai produce ruperea prin oboseală oricât de multe cicluri de solicitare ar exista în piesă. Ruperile prin oboseală conferă secțiunii de rupere un aspect specific (Fig.5.2-1). Într-o secțiune ruptă prin oboseală se disting două zone: una lucioasă şi una grăunțoasă, cu cristale ascuțite rezultată în urma unei ruperi casante.

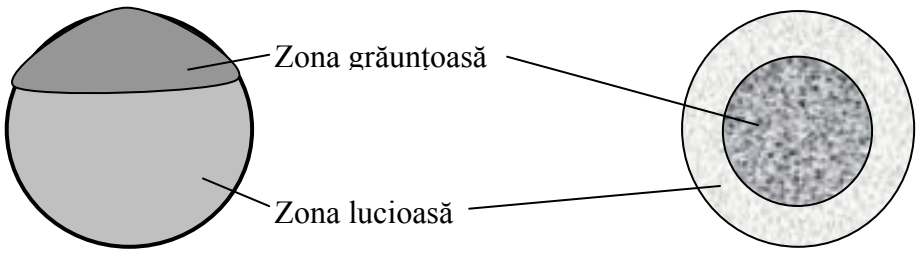


Fig.5.2-1

Inițierea ruperii prin oboseală are loc în zona tensiunilor mari, unde anumiți factori, cum ar fi concentratorii de tensiune, sunt prezenți şi care inițiază microfisura. Apoi aceasta se măreşte şi ca urmare a frecărilor dintre suprafețele separate, apare zona lucioasă. Când secțiunea a slăbit suficient de mult, are loc

separarea bruscă a suprafețelor, formându-se astfel cea de-a doua zonă, zona grăunțoasă..

Calculul de rezistență are în vedere la solicitările statice, ipoteza mediului continuu omogen şi izotrop. Ori este bine cunoscut faptul că în structura materialului există o serie de pori, incluziuni, microfisuri, orientări diferite ale cristalelor etc., care constituie concentratori puternici de tensiuni, deosebit de periculoşi în cazul solicitărilor variabile. Pe baza acestor observații, pentru calculul la oboseală s-au stabilit metode de calcul specifice.

5.3 REZISTENȚA LA OBOSEALĂ. CURBA LUI W□HLER

La solicitarea variabilă caracteristica mecanică limită a materialului este *rezistența la oboseală.* Determinarea rezistenței la oboseală este standardizată utilizându-se diferite tipuri de epruvete, cu forme şi dimensiuni specifice.

Schema unei instalații simple pentru determinarea rezistenței la oboseală este prezentată în Fig.5.3-1a.

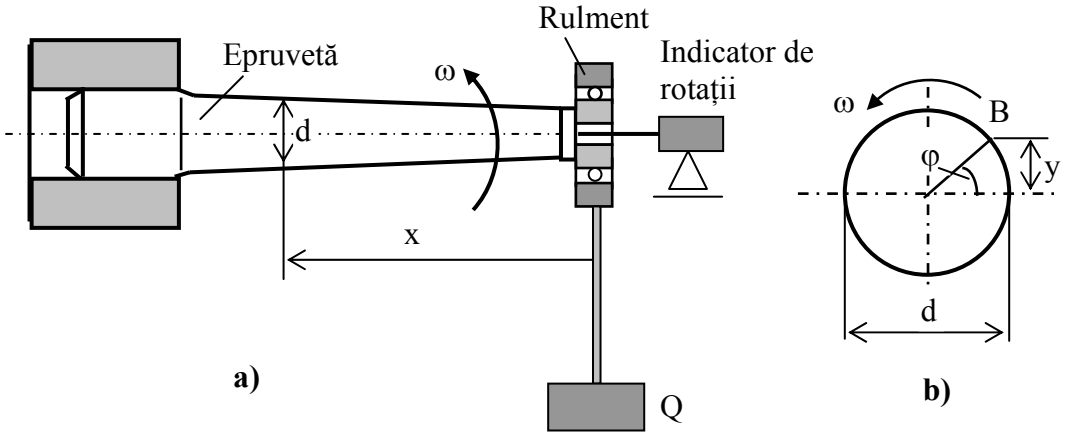


Fig.5.3-1

Epruvetele sunt încastrate într-un capăt, iar în capătul liber se încarcă cu o greutate *Q*. Încărcarea se face prin intermediul unui rulment pentru a da posibilitate epruvetei să se rotească. De asemenea instalația este prevăzută cu un numărător de turații (cicluri). În timpul rotirii epruvetei tensiunea normală din dreptul unui punct oarecare îşi modifică valoarea după un ciclu alternant simetric.

Viteza unghiulară ω constantă a epruvetei, într-o poziție oarecare după un timp *t*, determină în punctul *B*, unghiul φ:

$$\varphi = \omega \cdot t \qquad 5.3\text{-}1$$

iar ordonata punctului *B* este:

$$y = \frac{d}{2} \cdot \sin\varphi = \frac{d}{2} \cdot \sin\omega t \qquad 5.3\text{-}2$$

În punctul *B*, tensiunea normală se calculează cu relația:

$$\sigma = \frac{M_i}{I_z} \cdot y = \frac{32 \cdot Q\,x}{\pi \cdot d^3} \cdot \sin\omega t \qquad 5.3\text{-}3$$

ceea ce arată că în secțiunea transversală a epruvetei tensiunea variază sinusoidal, între valorile extreme:

$$\sigma_{max,min} = \pm \frac{32 \cdot Q\,x}{\pi \cdot d^3}$$
$$\Rightarrow \quad \sigma_m = 0$$

5.3-4

Epruveta se încearcă până la rupere şi se notează numărul de cicluri. Pentru determinarea rezistenței la oboseală, se încearcă mai multe epruvete la diferite forțe de încărcare. Epruvetele încercate cu forțe (tensiuni) mai mari se rup la un număr mai mic de cicluri. La o tensiune σ_1 aplicată, numărul de cicluri până la rupere este N_1, la tensiunea σ_2 corespunde N_2, la σ_3 corespunde N_3 etc. Tensiunea şi numărul de cicluri se înregistrează într-o diagramă, diagrama $\sigma_{max} = f(N)$. Această diagramă este cunoscută sub numele de *curba W✶hler* (Fig.5.3-2).

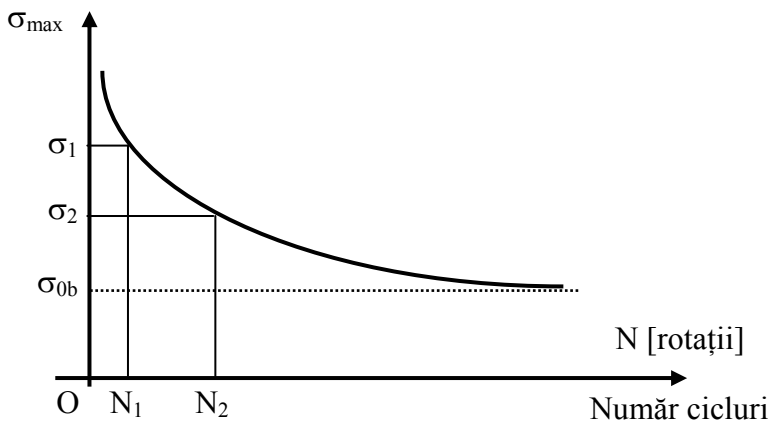


Fig.5.3-2

Curba se apropie asimptotic de tensiunea σ_{0b}, pentru care epruveta nu se mai rupe indiferent de numărul de cicluri de solicitare.

Valoarea $\sigma_0 = \sigma_{0b}$ a tensiunii se numeşte *rezistență la oboseală.* Altfel spus, *rezistența la oboseală este acea valoare maximă a tensiunii la care epruveta nu se mai rupe nici după un număr foarte mare de cicluri*. De obicei, numărul maxim de cicluri se limitează la 10^7 cicluri (2-3 zile de funcționare continuă a instalației cu *n = 3000 rot/min)*.

Rezistența la oboseală depinde de mai mulți factori, în special de natura solicitării, prin coeficientul de asimetrie *R* şi ea se determină pe cale experimentală.

Rezistența la oboseală se notează cu simbolul tensiunii produse la care se adaugă un indice care reprezintă tocmai valoarea coeficientului de asimetrie al ciclului de solicitare:

- $\sigma_{0,3}$ – rezistența la oboseală pentru un ciclu cu $R = 0,3$
- σ_{-1} - rezistența la oboseală pentru un ciclu alternant simetric, $R = -1$
- τ_{-1} – rezistența la oboseală la torsiune pentru un ciclu alternant simetric, $R=-1$

În Tabelul 5.3 se prezintă valorile rezistenței la oboseală pentru câteva mărci de oțel.

Tabelul 5.3-1

Oțel cu σ_r [MPa]	**Tracțiune-compresiune σ_{-1t} [MPa]**	**Încovoiere σ_{-1} [MPa]**	**Torsiune τ_{-1} [MPa]**
320 – 420	120 – 150	160 – 220	80 – 120
400 – 500	120 – 160	170 – 220	100 – 130
480 – 600	170 – 210	200 – 270	110 – 140
600 – 750	190 – 250	250 – 340	150 – 200
700 – 850	-	310 – 380	170 – 230
850 – 1050	-	400 – 450	210 – 260
1050 – 1250	-	450 – 590	250 – 300
1250 - 1450	-	500 - 600	280 – 350

Pentru rezistența la oboseală se pot utiliza şi relații aproximative:

- $\sigma_{-1} \approx (0,4 \ldots 0,5)\ \sigma_r$ pentru oțel solicitat la încovoiere
- $\sigma_{-1} \approx (0,25 \ldots 0,5)\ \sigma_r$ pentru metale neferoase
- $\sigma_{-1t} \approx (0,7 \ldots 0,8)\ \sigma_{-1}$ la tracțiune-compresiune
- $\sigma_0 \approx (1,5 \ldots 1,6)\ \sigma_{-1}$ pentru oțel solicitat la ciclu pulsant
- $\tau_{-1} \approx 0,6\ \sigma_{-1}$ pentru oțel solicitat la torsiune
- $\tau_0 \approx (1,8 – 2)\ \tau_{-1}$ pentru oțel solicitat la torsiune, ciclu pulsant.

Pentru a cunoaște cât mai real modul de comportare al materialelor la solicitări variabile, încercările experimentale se pot efectua şi pe elemente de construcții sau direct pe piese, nu numai pe epruvete.

Dacă *curba W✶hler* se reprezintă în coordonate semilogaritmice σ_{max} – *log N* , rezultă o diagramă liniară ca cea prezentată în Fig.5.3-3.

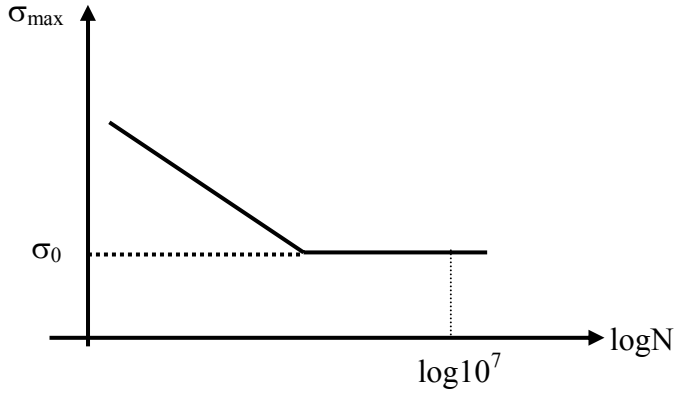


Fig.5.3-3

5.4 DIAGRAMELE REZISTENȚELOR LA OBOSEALĂ

S-a constatat că rezistența la oboseală depinde foarte mult de coeficientul de asimetrie *R* al ciclului de solicitare. Rezistența la oboseală este minimă pentru *R = -1* (ciclu alternant simetric) şi creşte dacă *R* variază de la *–1* la *+1*. Rezultă de aici, că orice material prezintă o infinitate de rezistențe la oboseală. Deoarece un material poate avea o infinitate de rezistențe la oboseală este necesar să se cunoască dacă este posibil, întreaga infinitate de valori şi pentru fiecare tip de solicitare. Este de mare ajutor dacă infinitatea rezistențelor la oboseală pentru o anumită solicitare, poate fi redată de o singură diagramă. Acest tip de diagrame reprezintă *diagramele de rezistență la oboseală.* Se cunosc mai multe tipuri de diagrame ale rezistențelor la oboseală.

Față de un sistem de coordonate σ_m - σ_{am} un ciclu poate fi reprezentat printr-un singur punct *M* (Fig.5.4-1).

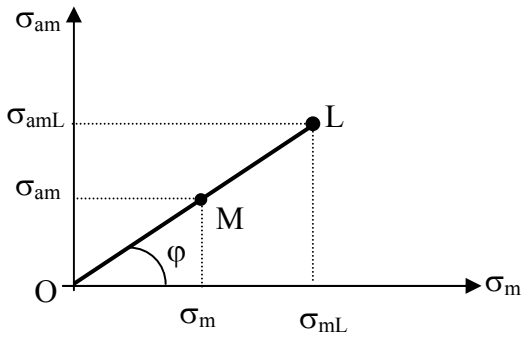


Fig.5.4-1

Între panta dreptei *OM* şi coeficientul de asimetrie al ciclului reprezentat de punctul *M*, se poate scrie următoarea relație:

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\sigma_{am}}{\sigma_m} = \frac{\dfrac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2}}{\dfrac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}} = \frac{1 - R}{1 + R}$$

$$\Rightarrow \; R = \frac{1 - \mathrm{tg}\varphi}{1 + \mathrm{tg}\varphi} = \mathrm{ct.} \qquad 5.4\text{-}2$$

Relația 5.4-2 arată că toate ciclurile reprezentate de punctele situate pe dreapta *OML* au acelaşi coeficient de asimetrie. Punctul *L* reprezintă un ciclu limită, adică un ciclu la care tensiunea maximă este egală cu rezistența la oboseală pentru ciclul cu respectivul coeficient de asimetrie. Locul geometric al punctelor *L,* reprezintă diagrama rezistențelor la oboseală sau *curba ciclurilor limită*, numită şi *diagrama Haigh* (Fig.5.4-2).

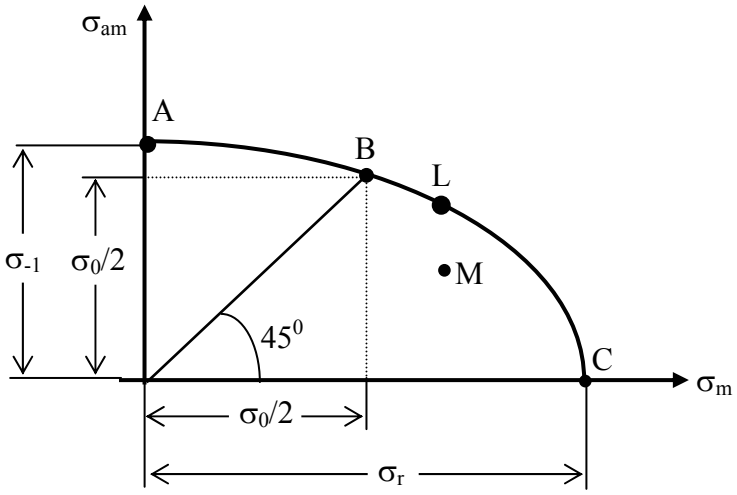


Fig.5.4-2

Punctele particulare *A,B,C* ale diagramei Haigh, reprezintă trei cicluri particulare:

- punctul *A*, cu $\sigma_m = 0$, $\sigma_{am} = \sigma_{-1}$ corespunde unui ciclu alternant simetric
- punctul *B* (situat pe bisectoare) cu $\sigma_m = \sigma_{am} = \sigma_0/2$ reprezintă un ciclu pulsant
- punctul *C* cu $\sigma_m = \sigma_r$, $\sigma_{am} = 0$ reprezintă o solicitare statică.

Orice punct din interiorul diagramei (punctul *M*) reprezintă un ciclu nepericulos la oboseală pe când punctul *L* sau alt punct situat în afara diagramei, conduce la ruperea prin oboseală.

Trasarea diagramei rezistențelor la oboseală de tip Haigh, necesită cunoaşterea multor valori experimentale. De obicei se determină rezistențele la oboseală pentru cicluri alternate, pulsante, care împreună cu caracteristicile mecanice conduc la aşa zisele *diagrame schematizate.*

Alt tip de diagramă a rezistențelor la oboseală este *diagrama Smith,* reprezentată în coordonate σ_m - σ_{max} , σ_{min} (Fig.5.4-3).

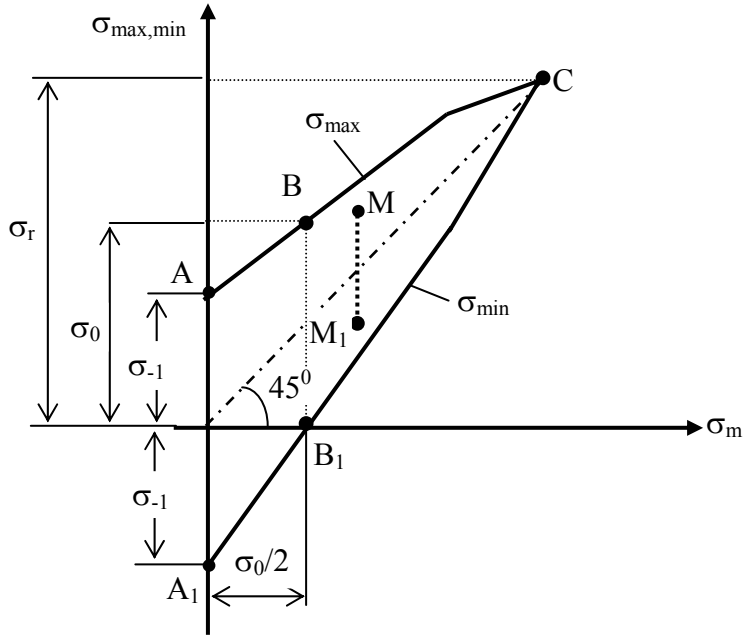


Fig.5.4-3

În diagrama Smith, un ciclu de solicitare este reprezentat de două puncte. Punctele $A - A_1$ reprezintă un ciclu alternant simetric, punctele $B - B_1$ un ciclu pulsant, iar punctul C solicitarea statică. Ciclurile reprezentate prin punte situate în interiorul diagramei (punctele $M - M_1$) sunt cicluri nepericuloase, iar cele care au cel puțin un punct pe diagramă sau în exteriorul acesteia sunt cicluri care conduc la ruperi prin oboseală. Trasarea acestor diagrame necesită foarte multe încercări experimentale. Din acest motiv obținerea diagramei Smith se face prin determinarea unui număr redus de rezistențe la oboseală, ceea ce conduce la diagrame schematizate.

5.5 SCEMATIZAREA DIAGRAMELOR REZISTENȚELOR LA OBOSEALĂ

După cum s-a mai spus, obținerea diagramelor rezistențelor la oboseală necesită foarte multe încercări experimentale care conduc la un efort mare şi un timp îndelungat. În practică se utilizează *diagrame schematizate* (simplificate)

ale rezistențelor la oboseală, diagrame pentru care în vederea trasării lor trebuie determinate mai puține mărimi. Astfel sunt cunoscute următoarele schematizări ale diagramelor rezistențelor la oboseală:

5.5.1 Schematizări ale diagramei Haigh

- *Schematizarea Gerber*. Diagrama rezistențelor la oboseală este parabola *ABC* (Fig.5.5.1-1), de ecuație:

$$\sigma_{am} = \sigma_{-1} \cdot \left[1 - \left(\frac{\sigma_m}{\sigma_r} \right)^2 \right] \qquad 5.5.1\text{-}1$$

Pentru obținerea acestei diagrame este necesar să se determine σ_{-1} şi σ_r.

- *Schematizarea Goodman* recomandată materialelor fragile, este reprezentată de dreapta *AC* (fig.5.5.1-1), de ecuație:

$$\sigma_{am} = \sigma_{-1} \cdot \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_r} \right) \qquad 5.5.1\text{-}2$$

Pentru această diagramă sunt necesare σ_{-1} şi σ_r.

- *Schematizarea Soderberg*, pentru materiale care au limită de curgere, este dreapta *AD* (Fig.5.5.1-1) de ecuație:

$$\sigma_{am} = \sigma_{-1} \cdot \left(1 - \frac{\sigma_m}{\sigma_c} \right) \qquad 5.5.1\text{-}3$$

iar pentru trasarea ei este necesar σ_{-1} şi σ_c.

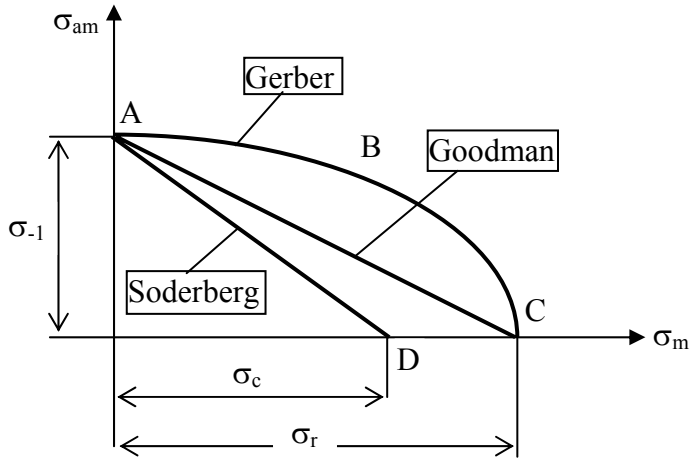


Fig.5.5.1-1

Scematizarea Goodman şi Soderberg se abat destul de mult de la diagrama reală, ceea ce duce la valori ale coeficienților de siguranță mai mici decât cei reali. Din acest motiv aceste schematizări (mai ales schematizarea Goodman) se utilizează mai puțin pentru calculul la oboseală.

- *Schematizarea Ujik* (Fig.5.5.1-2a) necesită pentru trasare cunoaşterea lui σ_{-1}, σ_c şi σ_r
- *Schematizarea Serensen* (Fig.5.5.1-2b) impune cunoaşterea lui σ_{-1}, σ_0 şi σ_c.

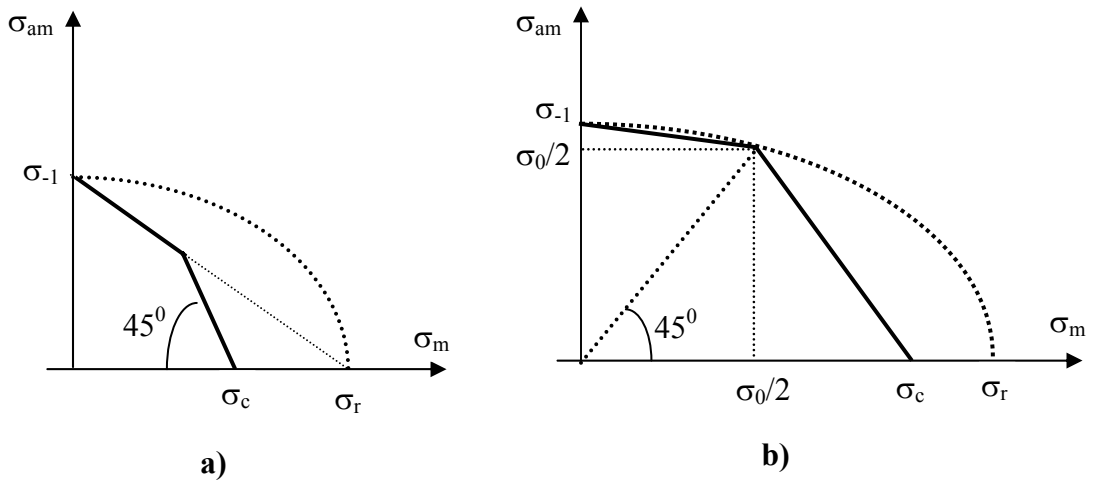


Fig.5.5.1-2

Schematizarea Ujik se abate mult de la forma diagramei reale, motiv pentru care este utilizată mai puțin.

Cele mai utilizate schematizări pentru calculele la oboseală sunt schematizarea Soderberg datorită mai ales simplității de obținere şi schematizarea Serensen, care este simplă şi mai apropiată de diagrama reală (diagrama Haigh).

5.5.2 Schematizarea diagramei Smith

Schematizarea diagramei Smith constă în limitarea ei superioară (a tensiunii maxime) la nivelul limitei de curgere σ_c.

La acest tip de diagramă, pentru trasarea ei sunt necesare: rezistența la oboseală pentru ciclu alternant simetric σ_{-1}, limita de curgere σ_c şi rezistența la oboseală pentru ciclul pulsant σ_0. Toate aceste caracteristici de material necesare trasării diagramei Smith sunt destul de uşor de obținut, ceea ce face ca diagrama Smith să fie foarte mult utilizată în calculele de rezistență. Din aceste diagrame se utilizează în calcule, în mod special, cele trei caracteristici de material amintite anterior.

Forma diagramei Smith, schematizate pe baza celor afirmate mai înainte, este prezentată în Fig.5.5.2-1.

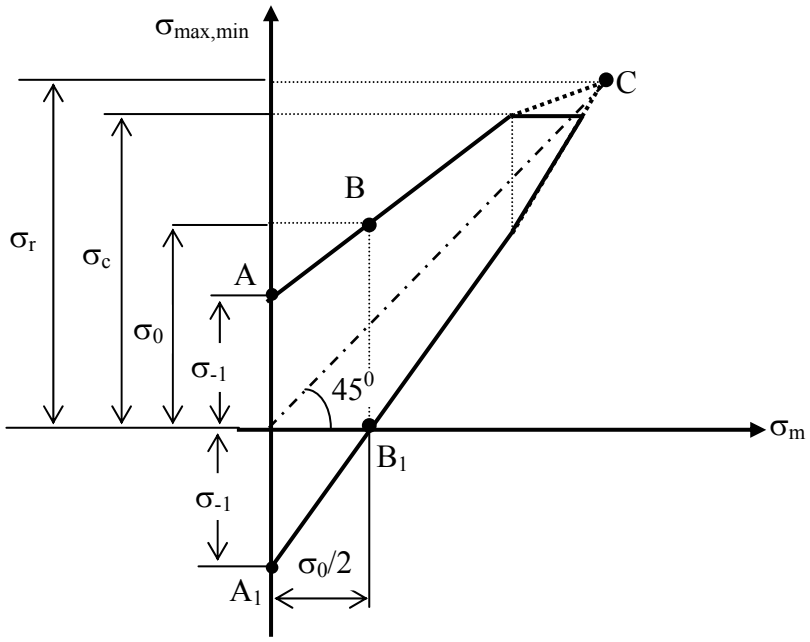


Fig.5.5.2-1

5.6 FACTORII CARE INFLUENȚEAZĂ REZISTENȚA LA OBOSEALĂ

Rezistența la oboseală a diferitelor elemente de rezistență sau organe de maşini supuse solicitărilor variabile, depinde de foarte mulți factori. Factorii care influențează rezistența la oboseală pot fi clasificați în mai multe categorii:

- *Factori constructivi:*
  - concentratorii de tensiune
  - mărimea piesei
- *Factori tehnologici:*
  - calitatea suprafeței piesei
  - structura materialului
  - tehnologia de elaborare a semifabricatului
  - tensiunile remanente
  - tratamentele termice
- *Factori de exploatare:*
  - mediul de lucru (agenții corozivi etc.)
  - coeficientul de asimetrie al ciclului de solicitare

- temperatura piesei
- tipul solicitării
- frecvența ciclului de solicitare

În cele ce urmează, se prezintă doar cei mai importanți factori de influență şi de care se ține seama în mod direct în calculele de oboseală.

Este cunoscut faptul că în locurile unde secțiunea transversală variază brusc (găuri, gâtuiri, renuri etc.) şi la contactul dintre corpuri apar concentrări puternice de tensiuni. Tensiunile sunt cu atât mai mari cu cât variația secțiunii este mai mare şi raza de racordare mai mică. În cazul solicitărilor statice se defineşte un *coeficient teoretic de concentrare*, ca fiind raportul dintre tensiunea maximă din concentrator şi tensiunea nominală (calculată neglijând existența concentratorului):

$$\alpha_k = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_n} \qquad 5.6\text{-}1$$

Coeficientul teoretic de concentrare nu poate fi neglijat în cazul materialelor fragile. La materialele tenace, concentratorii de tensiune nu sunt prea periculoşi.

La solicitările variabile coeficientul de concentrare are o valoare mai mică decât în cazul solicitărilor statice şi aceasta datorită unei uşoare egalizări a tensiunilor prin variația solicitării. În calculul solicitărilor variabile se utilizează *coeficientul efectiv de concentrare* K_σ, respectiv K_τ, definit prin relația:

$$K_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1K}} > 1$$
$$K_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1K}} > 1 \qquad 5.6\text{-}2$$

unde

σ_{-1}, τ_{-1} – rezistența la oboseală a epruvetei standardizate

σ_{-1K}, τ_{-1K} – rezistența la oboseală a epruvetei cu concentrator

Coeficientul efectiv de concentrare se determină pe cale experimentală şi el se găseşte în literatura de specialitate sub forma unor diagrame pentru diferite tipuri şi mărimi de concentratori.

Concentratorii de tensiune reduc rezistența pieselor supuse solicitărilor variabile. Din acest motiv, este necesar să se evite pe cât posibil variațiile bruşte ale secțiunilor transversale ale pieselor, mai ales în zona existenței tensiunilor mari.

Dimensiunile piesei influențează semnificativ rezistența la oboseală. Cu cât dimensiunile piesei sunt mai mari cu atât rezistența la oboseală este mai mică. Piesele de dimensiuni mici au o rezistență mai mare la oboseală. Aceasta se poate explica prin aceea că piesele mari au un volum şi o suprafață mai mare care conține mai multe incluziuni nemetalice, pori, cristale orientate diferit şi

care constituie puternici concentratori interni de tensiune. În calculele la oboseală, mărimea piesei se ia în considerare printr-un *factor dimensional* ε_σ, respectiv ε_τ definit de raportul:

$$\varepsilon_\sigma = \frac{\sigma_{-1d}}{\sigma_{-1}} < 1$$
$$\varepsilon_\tau = \frac{\tau_{-1d}}{\tau_{-1}} < 1 \qquad 5.6\text{-}3$$

unde

σ_{-1d}, τ_{-1d} – rezistența la oboseală a piesei cu dimensiunea oarecare *d.*

Factorul dimensional se găseşte în literatura de specialitate sub formă de diagrame pentru diferite materiale şi solicitări.

Starea suprafeței piesei este un alt factor care influențează rezistența la oboseală. Piesele cu suprafața prelucrată fin au rezistența la oboseală mult mai mare decât piesele cu suprafața prelucrată grosolan sau cu suprafața corodată. Influența stării suprafeței este mult mai pronunțată la solicitarea de torsiune şi încovoiere, la care tensiunile maxime apar la suprafața exterioară a piesei. Zgârieturile, asperitățile de la suprafața piesei constituie concentratori de tensiuni adică centre de amorsare a fisurilor. Cu cât suprafața piesei este mai fin prelucrată cu atât prezența concentratorilor de tensiune este mai puțin posibilă şi rezistența la oboseală este mai mare.

Starea de prelucrare a suprafeței se ia în considerare în calculul la oboseală prin *coeficientul de calitate al suprafeței* γ definit prin raportul:

$$\gamma = \frac{\sigma_{-1\gamma}}{\sigma_{-1}} < 1 \qquad 5.6\text{-}4$$

unde

$\sigma_{-1\gamma}$ - rezistența la oboseală a piesei cu un anumit grad de prelucrare a suprafeței.

Valorile coeficientului de calitate al suprafeței se găseşte în literatura de specialitate sub formă de diagrame.

Cei trei factori de influență ai rezistenței la oboseală pot fi grupați într-un *factor global de influență* a rezistenței la oboseală:

$$K_{\sigma D} = \frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma \cdot \gamma} > 1$$
$$K_{\tau D} = \frac{K_\tau}{\varepsilon_\tau \cdot \gamma} > 1 \qquad 5.6\text{-}5$$

De ceilalți factori de influență, în calculul la oboseală se ține seama la rezultatul final, printr-o ajustare corespunzătoare.

5.7 CALCULUL LA OBOSEALĂ. CALCULUL COEFICIENTULUI DE SIGURANȚĂ

Calculul de dimensionare la oboseală este dificil deoarece apar mai multe necunoscute. Din acest motiv, dimensionarea la oboseală se efectuează cu ajutorul metodelor clasice de rezistență, stabilite pentru solicitările statice însă cu tensiuni admisibile mai mici. În literatura de specialitate se găsesc valorile admisibile recomandate pentru calculul la solicitări variabile. În lipsa acestor date, între tensiunile admisibile se poate accepta următoarea relație:

$$\left|\sigma_a\right|_{R=+1} = 2 \cdot \left|\sigma_a\right|_{R=0} = 3 \cdot \left|\sigma_a\right|_{R=-1} \qquad 5.7\text{-}1$$

Calculul la oboseală este un calcul de verificare care se efectuează după calculul clasic de rezistență la solicitări statice. Verificarea la solicitarea variabilă presupune determinarea *coeficientului de siguranță* în secțiunile periculoase, susceptibile la oboseală. Pentru ca piesa să satisfacă condiția de rezistență la oboseală este necesar ca valoarea coeficientului de siguranță la oboseală să fie mai mare decât o valoare admisă (coeficient de siguranță admis). Coeficienții de siguranță admişi au valori în general mici.

Coeficientul de siguranță la oboseală se defineşte ca fiind raportul:

$$c_\sigma = \frac{\sigma_{Rpiesă}}{\sigma_{max}} \quad \text{respectiv} \quad c_\tau = \frac{\tau_{Rpiesă}}{\tau_{max}} \qquad 5.7\text{-}2$$

unde

$\sigma_{Rpiesă}$, $\tau_{Rpiesă}$ – rezistența la oboseală a piesei la solicitarea variabilă

σ_{max}, τ_{max} – tensiunea maximă produsă în piesă calculată cu relațiile cunoscute de la solicitările statice.

În Tabelul 5.7-1 se prezintă valorile coeficienților de siguranță pentru câteva piese.

Tabelul 5.7-1

F e l u l p i e s e l o r	**Coeficientul de siguranță**
Piese de maşini din oțel	1,5 … 1,7
Piese uşoare de maşini, din oțel	1,3 … 1,4
Piese din oțel turnat	1,4 … 2
Piese din fontă	2 … 3
Piese din aliaje de cupru	2 … 2,7
Piese din aliaje uşoare	2 … 2,5

După cum s-a mai afirmat, rezistența la oboseală se realizează pe epruvete după norme bine precizate (standarde). Rezistența la oboseală a piesei diferă de cea a epruvetei, deoarece piesa poate avea concentratori de tensiune, o anumită mărime diferită de a epruvetei, o stare de prelucrare a suprafeței etc. Prin urmare, rezistența la oboseală a piesei supusă unei solicitări variabile cu coeficientul de asimetrie *R* poate fi exprimată în funcție de cea a epruvetei, pe baza factorilor de influență:

$$\sigma_{Rpiesă} = \frac{\sigma_R}{\dfrac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma \cdot \gamma}} = \frac{\varepsilon_\sigma \cdot \gamma}{K_\sigma} \cdot \sigma_R$$

$$\tau_{Rpiesă} = \frac{\tau_R}{\dfrac{K_\tau}{\varepsilon_\tau \cdot \gamma}} = \frac{\varepsilon_\tau \cdot \gamma}{K_\tau} \cdot \tau_R \qquad 5.7\text{-}3$$

iar coeficientul de siguranță la oboseală are expresia:

$$c_\sigma = \frac{\varepsilon_\sigma \cdot \gamma}{K_\sigma} \cdot \frac{\sigma_R}{\sigma_{max}}$$

$$c_\tau = \frac{\varepsilon_\tau \cdot \gamma}{K_\tau} \cdot \frac{\tau_R}{\tau_{max}} \qquad 5.7\text{-}4$$

unde

σ_R , τ_R – rezistența la oboseală determinată pe epruvete solicitate cu un ciclu cu coeficientul de asimetrie *R*.

Coeficientul de siguranță are forme diferite, dependente de natura solicitării:

- *Pentru ciclul alternant-simetric.* În acest caz, relațiile 5.7-4 capătă următoarea formă:

$$c_\sigma = \frac{\varepsilon_\sigma \cdot \gamma}{K_\sigma} \cdot \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{max}}$$

$$c_\tau = \frac{\varepsilon_\tau \cdot \gamma}{K_\tau} \cdot \frac{\tau_{-1}}{\tau_{max}} \qquad 5.7\text{-}5$$

- *Pentru cicluri cu coeficient de asimetrie oarecare.* Pentru o solicitare variabilă oarecare, coeficientul de siguranță depinde de:
  - schematizarea diagramelor rezistențelor la oboseală
  - criteriul ales pentru calculul la oboseală.

Fie diagrama de tip Haigh a rezistențelor la oboseală şi un ciclu oarecare de solicitare reprezentat de punctul *M* (Fig.5.7-1). De la punctul *M* la un ciclu limită se poate ajunge parcurgând mai multe trasee:

- dreapta *M –L* care reprezintă un criteriul *R = oarecare*
- dreapta $M - L_1$ care reprezintă criteriul *R = const.*
- dreapta $M - L_2$ care reprezintă criteriul σ_m = *const.*
- dreapta $M - L_3$ care reprezintă criteriul σ_{min} = *const.*
- dreapta $M - L_4$ care reprezintă criteriul σ_{am} = *const.*

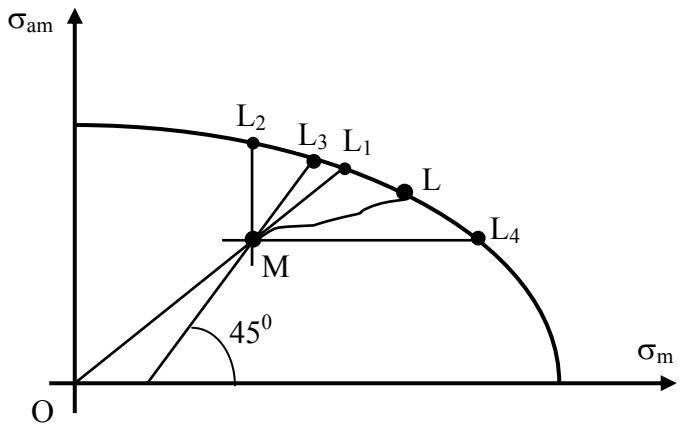


Fig.5.7-1

Cel mai utilizat criteriu pentru calculul coeficientului de siguranță este criteriul *R = const.*

Coeficientul de siguranță poate fi definit şi pe baza stărilor limită, preluate din diagrama rezistențelor la oboseală, cunoscându-se faptul că punctele *L*, L_1, L_2, L_3, L_4 reprezintă cicluri limită:

$$c_\sigma = \frac{\sigma_{max\,L}}{\sigma_{max}} \quad ; \quad c_\tau = \frac{\tau_{max\,L}}{\tau_{max}}$$

$$c_\sigma = \frac{\sigma_{amL}}{\sigma_{am}} \quad ; \quad c_\tau = \frac{\tau_{amL}}{\tau_{am}} \qquad 5.7\text{-}6$$

$$c_\sigma = \frac{\sigma_{mL}}{\sigma_m} \quad ; \quad c_\tau = \frac{\tau_{mL}}{\tau_m}$$

Calculul coeficientului de siguranță la oboseală se va face în cele ce urmează pe baza criteriului *R = const.*, pentru două schematizări ale diagramelor rezistențelor la oboseală: schematizarea Soderberg, respectiv schematizarea Serensen.

5.7.1 Calculul coeficientului de siguranță, schematizarea Soderberg, criteriul *R = const.*

Fie un ciclu asimetric reprezentat de punctul *N* din schematizarea Soderberg (Fig.5.7.1-1). Ciclul limită corespunzător ciclului *N* pentru criteriul *R = const.* este ciclul reprezentat de punctul *L*.

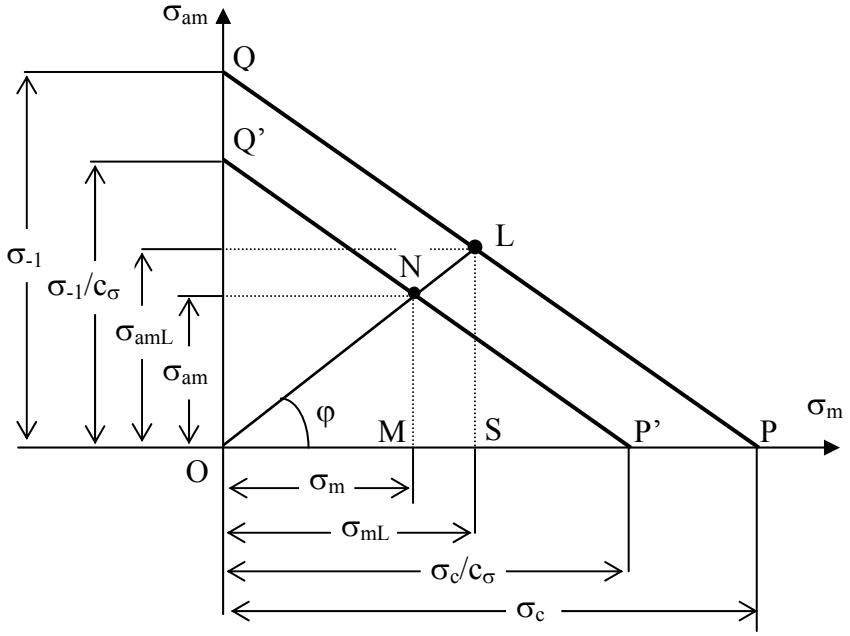


Fig.5.7.1-1

Din asemănarea triunghiurilor *ONM* şi *OLS* se poate constata că

$$c_\sigma = \frac{OL}{ON} \qquad 5.7.1\text{-}1$$

de unde rezultă că toate ciclurile de pe segmentul Q'P' paralel cu segmentul *QP* au acelaşi coeficient de siguranță față de ciclurile limită, pentru criteriul *R = const*.

De asemenea, din asemănarea triunghiurilor *NMP'* şi *Q'OP'* se poate scrie:

$$\frac{OQ'}{OP'} = \frac{NM}{MP'} \Rightarrow \frac{\dfrac{\sigma_{-1}}{c_\sigma}}{\dfrac{\sigma_c}{c_\sigma}} = \frac{\sigma_{am}}{\dfrac{\sigma_c}{c_\sigma} - \sigma_m} \qquad 5.7.1\text{-}2$$

Din relația 5.7.1-2 rezultă expresia coeficientului de siguranță pentru epruvetă:

$$c_\sigma = \frac{1}{\frac{\sigma_{am}}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_c}} \qquad 5.7.1\text{-}3$$

Dacă se are în vedere că rezistența la oboseală a piesei are expresia (cunoscută deja):

$$\sigma_{-1\text{piesă}} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma \cdot \gamma}} \qquad 5.7.1\text{-}4$$

coeficientul de siguranță pentru piesă devine:

$$c_{\sigma\text{piesă}} = c_\sigma = \frac{1}{\frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma \cdot \gamma} \cdot \frac{\sigma_{am}}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_c}} \qquad 5.7.1\text{-}5$$

Pentru solicitarea de torsiune variabilă, coeficientul de siguranță are expresia:

$$c_{\tau\text{piesă}} = c_\tau = \frac{1}{\frac{K_\tau}{\varepsilon_\tau \cdot \gamma} \cdot \frac{\tau_{am}}{\tau_{-1}} + \frac{\tau_m}{\tau_c}} \qquad 5.7.1\text{-}6$$

Relațiile 5.7.1-5, respectiv 5.7.1-6 permit calculul coeficientului de siguranță în cazul pieselor solicitate la încovoiere variabilă, respectiv torsiune variabilă.

5.7.2 Calculul coeficientului de siguranță, schematizarea Serensen, criteriul *R = const.*

Toate ciclurile situate pe segmentul *M'B'* paralel cu segmentul *AB* au acelaşi coeficient de siguranță c_σ (Fig.5.7.2-1).

Din asemănarea triunghiurilor *MB'D'* şi *ABD* se poate scrie următoarea relație:

$$\frac{MD'}{B'D'} = \frac{AD}{BD} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_{am} - \dfrac{\sigma_0}{2 \cdot c_\sigma}}{\dfrac{\sigma_0}{2 \cdot c_\sigma} - \sigma_m} = \frac{\sigma_{-1} - \dfrac{\sigma_0}{2}}{\dfrac{\sigma_0}{2}} \qquad 5.7.2\text{-}1$$

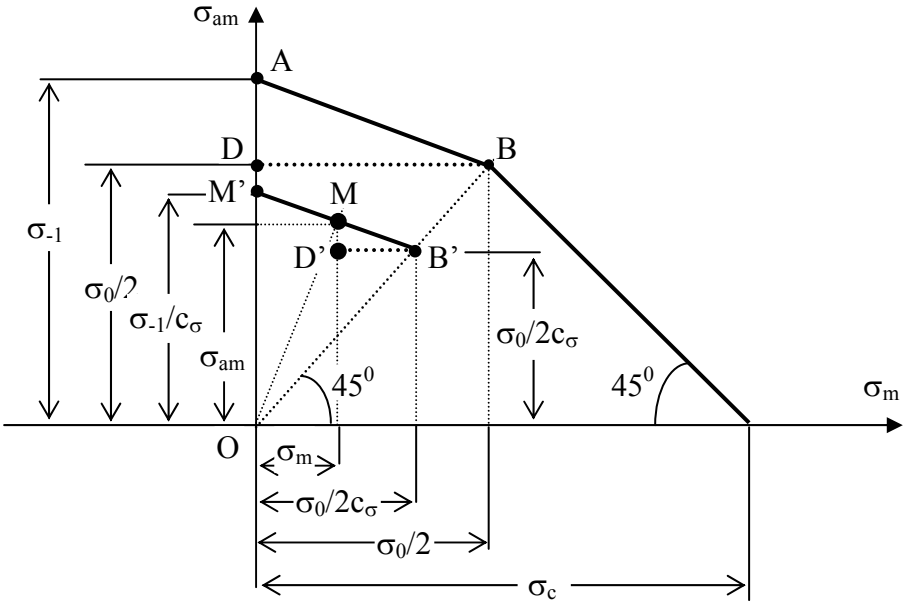


Fig.5.7.2-1

Din relația 5.7.2-1 se obține o primă formă pentru expresia coeficientului de siguranță al epruvetei:

$$c_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{am} + \dfrac{2 \cdot \sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0} \cdot \sigma_m} \qquad 5.7.2\text{-}2$$

Notând în relația 5.7.2-2 cu:

$$\psi_\sigma = \frac{2 \cdot \sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0} \qquad 5.7.2\text{-}3$$

relația 5.7.2-2 capătă forma:

$$c_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{am} + \psi_\sigma \cdot \sigma_m} \qquad 5.7.2\text{-}4$$

Dacă se are în vedere expresia rezistenței la oboseală a piesei (relația 5.7.1-4), rezultă expresia coeficientului de siguranță la oboseală a piesei solicitată la încovoiere:

$$c_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma \cdot \gamma} \cdot \sigma_{am} + \psi_\sigma \cdot \sigma_m} \qquad 5.7.2\text{-}5$$

Asemănător se poate arăta că la solicitarea de torsiune variabilă, pentru schematizarea Serensen, expresia coeficientului de siguranță are expresia:

$$c_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\frac{K_\tau}{\varepsilon_\tau \cdot \gamma} \cdot \tau_{am} + \psi_\tau \cdot \tau_m} \qquad 5.7.2\text{-}6$$

unde

$$\psi_\tau = \frac{2 \cdot \tau_{-1} - \tau_0}{\tau_0} \qquad 5.7.2\text{-}7$$

În concluzie, pentru solicitarea de încovoiere respectiv torsiune, coeficientul de siguranță la oboseală, pentru schematizarea Serensen, se calculează cu relațiile 5.7.2-5 şi 5.7.2-3, respectiv 5.7.2-6 şi 5.7.2-7.

5.7.3 Calculul coeficientului de siguranță la solicitări variabile compuse

Pentru solicitările variabile compuse de încovoiere cu torsiune, cicluri alternant simetrice în fază, *coeficientul de siguranță global* c_g se poate determina pornind de la expresia tensiunii echivalente, de exemplu, corespunzătoare teoriei a III-a de rezistență:

$$\sigma_{echIII} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$\Rightarrow \sigma_{echIII}^2 = \sigma^2 + 4\tau^2 \Rightarrow \left(\frac{\sigma_{echIII}}{\sigma_{-1}}\right)^2 = \left(\frac{\sigma}{\sigma_{-1}}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{\tau}{\sigma_{-1}}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\left(\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{echIII}}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{\sigma_{-1}}{\sigma}\right)^2} + 4 \cdot \frac{1}{\left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau}\right)^2} \qquad 5.7.3\text{-}1$$

Dacă se are în vedere că:

$$\tau_{-1} = \frac{\sigma_{-1}}{2} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{-1} = 2 \cdot \tau_{-1} \qquad 5.7.3\text{-}2$$

atunci relația 5.7.3-1 conduce la:

$$\frac{1}{\left(\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{echIII}}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{\sigma_{-1}}{\sigma}\right)^2} + 4 \cdot \frac{1}{\left(\frac{2 \cdot \tau_{-1}}{\tau}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\left(\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{echIII}}\right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{\sigma_{-1}}{\sigma}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{\tau_{-1}}{\tau}\right)^2} \qquad 5.7.3\text{-}3$$

Se observă că numitorii relației 5.7.3-3 reprezintă tocmai coeficienții de siguranță global, respectiv la încovoiere şi torsiune. Rezultă astfel următoarea expresie:

$$\frac{1}{c_g^2} = \frac{1}{c_\sigma^2} + \frac{1}{c_\tau^2} \qquad 5.7.3\text{-}4$$

de unde se obține expresia coeficientului de siguranță global pentru solicitarea compusă de încovoiere şi torsiune variabile:

$$c_g = \frac{c_\sigma \cdot c_\tau}{\sqrt{c_\sigma^2 + c_\tau^2}} < c_\sigma, c_\tau \qquad 5.7.3\text{-}5$$

Aşadar, cunoscându-se coeficienții de siguranță la solicitarea de încovoiere şi torsiune variabile, cu relația 5.7.3-5 se determină coeficientul de siguranță global la solicitarea compusă de încovoiere cu torsiune.

5.8 CALCULUL LA DURABILITATE LIMITATĂ

Curba *W✱hler* reprezentată în coordonate semilogaritmice (vezi Fig.5.3-3) se prezintă ca în Fig.5.8-1.

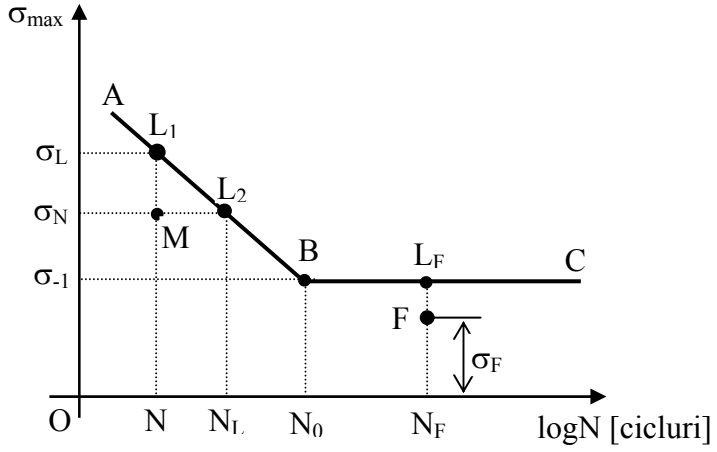


Fig.5.8-1

Dacă într-o piesă se realizează o solicitare variabilă cu tensiunea $\sigma_{max} = \sigma_F$ produsă de un număr mare de ori $N_F > N_0$ (numărul de cicluri corespunzător rezistenței la oboseală), la starea limită se ajunge pe verticala FL_F . Oriunde se află punctul L_F pe porțiunea *BC*, starea limită este tocmai rezistența la oboseală σ_{-1}.

Punctul *M* reprezintă o stare care s-a aplicat de un număr *N* de ori, cu $N < N_0$.

În acest caz, tensiunea σ_N din piesă poate fi mai mare decât rezistența la oboseală σ_{-1}, fără ca aceasta să cedeze prin oboseală. De la punctul *M* se poate ajunge la starea limită pe două direcții:

- *pe verticala* ML_1 unde tensiunea limită este σ_L şi reprezintă *rezistența de durată,* corespunzătoare la N cicluri de solicitare
- *pe orizontala* ML_2 corespunzătoare tensiunii σ_N şi numărului limită de cicluri N_L, numit *durata de viață* a piesei.

Porțiunea *AB* reprezintă *curba de durabilitate limitată* din diagrama *W✱hler* .

De multe ori în practică, piesele trebuie să funcționeze un anumit timp (durată limitată) mai mic decât cel care ar duce la atingerea rezistenței la oboseală, după care se scot din funcționare. Pentru aceste piese nu se mai calculează coeficientul de siguranță la oboseală, ci se face calculul la *durabilitate limitată.*

Pentru starea reală din piesă definită de punctul $M(\sigma_N, N)$, se pot defini atunci doi coeficienți de siguranță:

- *coeficient de siguranță față de rezistența de durată limitată:*

$$c_\sigma = \frac{\sigma_L}{\sigma_N} \qquad 5.8\text{-}1$$

- *coeficient de siguranță la durabilitate:*

$$c_N = \frac{N_L}{N} \qquad 5.8\text{-}2$$

Acest calcul este recomandat atunci când piesa are o durată de funcționare mai mică decât cea corespunzătoare atingerii rezistenței la oboseală.

Problema durabilității limitate poate fi studiată şi pe cale analitică, dacă se acceptă că ecuația curbei *W✶hler* este de forma:

$$\frac{N}{N_0} = \left(\frac{\sigma_{-1}}{\sigma}\right)^m \Rightarrow N \cdot \sigma^m = N_0 \cdot \sigma_{-1}^m \qquad 5.8\text{-}3$$

unde

N, σ - coordonatele unui punct curent de pe linia de durabilitate limitată

N_0, σ_{-1} – coordonatele punctului *B* (numărul de cicluri corespunzător rezistenței la oboseală, respectiv rezistența la oboseală)

m – un coeficient.

Pentru oțeluri se poate considera $N_0 = 10^6 \ldots 5 \cdot 10^6$. Coeficientul *m* are o dispersie mare (*m = 2 ... 9)*, dar pentru oțeluri el poate fi egal cu *9* sau *6*, (*m = 9, m = 6)*.

Pentru un punct oarecare situat pe porțiunea descendentă a curbei *W✶hler*, expresia tensiunii σ se poate determina cu relația:

$$\sigma = \sigma_{-1} \cdot \sqrt[m]{\frac{N_0}{N}} = \sigma_L \qquad 5.8\text{-}4$$

Prin urmare, pentru un număr de cicluri dat *N*, la o solicitare cu amplitudinea ciclului σ_N, coeficientul de siguranță față de rezistența de durată limitată este:

$$c_\sigma = \frac{\sigma_L}{\sigma_N} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_N} \cdot \sqrt[m]{\frac{N_0}{N}} \qquad 5.8\text{-}5$$

5.9 APLICAȚII

Aplicația 5.9.1 *Să se verifice arborele unei maşini supus unei solicitări de încovoiere cu torsiune. Se cunosc: d = 40 mm,* $c_a = 2$, $M_{imax} = 50$ *KN cm,* $M_{imin} = 14$ *KN cm,* $M_{tmax} = 37$ *KN cm,* $M_{tmin} = 9$ *KN cm,* $\sigma_0 = 350$ *MPa,* $\sigma_{-1} = 230$ *MPa,* $\tau_0 = 200$ *MPa,* $\tau_{-1} = 140$ *MPa,* $K_\sigma = 1,6$, $K_\tau = 1,3$, $\varepsilon_\sigma = \varepsilon_\tau = 0,78$, $\gamma = 0,91$.

Rezolvare

- *Calculul coeficientului de siguranță la încovoiere*
  Se utilizează relația stabilită pentru schematizarea Serensen:

$$c_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma \cdot \gamma} \cdot \sigma_{am} + \psi_\sigma \cdot \sigma_m}$$

unde

$$\psi_\sigma = \frac{2\sigma_1 - \sigma_0}{\sigma_0} = \frac{2 \cdot 230 - 350}{350} = 0,314$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{i\,max}}{W_z} = \frac{M_{i\,max}}{\frac{\pi \cdot d^3}{32}} = 79,57 \quad \text{MPa}$$

$$\sigma_{min} = \frac{M_{i\,min}}{W_z} = \frac{M_{i\,min}}{\frac{\pi \cdot d^3}{32}} = 22,28 \quad \text{MPa}$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} = 50,92 \quad \text{MPa}$$

$$\sigma_{am} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = 28,645 \quad \text{MPa}$$

$$c_\sigma = \frac{230}{\frac{1,6}{0,78 \cdot 0,91} \cdot 28,645 + 0,314 \cdot 50,92} = 2,85$$

- *Calculul coeficientului de siguranță la torsiune*

Coeficientul de siguranță la solicitarea de torsiune se calculează cu relația:

$$c_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\frac{K_\tau}{\varepsilon_\tau \cdot \gamma} \cdot \tau_{am} + \psi_\tau \cdot \tau_m}$$

unde

$$\psi_\tau = \frac{2 \cdot \tau_{-1} - \tau_0}{\tau_0} = \frac{2 \cdot 140 - 200}{200} = 0{,}4$$

$$\tau_{max} = \frac{M_{max}}{W_p} = \frac{M_{t\,max}}{\frac{\pi \cdot d^3}{16}} = 29{,}44 \quad \text{MPa}$$

$$\tau_{min} = \frac{M_{min}}{W_p} = \frac{M_{t\,min}}{\frac{\pi \cdot d^3}{16}} = 7{,}16 \quad \text{MPa}$$

$$\tau_m = \frac{\tau_{max} + \tau_{min}}{2} = 18{,}3 \quad \text{MPa}$$

$$\tau_{am} = \frac{\tau_{max} - \tau_{min}}{2} = 11{,}17 \quad \text{MPa}$$

$$c_\tau = \frac{140}{\frac{1{,}3}{0{,}78 \cdot 0{,}91} \cdot 11{,}17 + 0{,}4 \cdot 18{,}3} = 5{,}04$$

Coeficientul de siguranță global este:

$$c_g = \frac{c_\sigma \cdot c_\tau}{\sqrt{c_\sigma^2 + c_\tau^2}} = \frac{2{,}85 \cdot 5{,}04}{\sqrt{2.85^2 + 5{,}04^2}} = 2{,}48 > c_a = 2$$

Coeficientul de siguranță global este mai mare decât cel minim admis, ceea ce înseamnă că arborele nu se va distruge prin rupere la oboseală. Se poate constata că şi tensiunile maxime normale sau tangențiale la solicitarea statică au valori sub cele admisibile.

Aplicația 5.9.2 *Ansamblul prezentat în Fig.5.9.2-1 este confecționat din OL50. Forța F_0 = 16 daN şi este statică, iar forța F variază după un ciclu alternant simetric de la F_{max} la F_{min} cu F_{max} = -F_{min} . Se cere să se determine forța F_{max} pentru c_a = 2, dacă D = 80 mm, d = 40 mm, r = 2 mm, l = 400 mm, a = 100 mm. Piesa are suprafața cu un polizaj mijlociu, lucrează în aer şi nu a suferit nici un tratament termic superficial.*

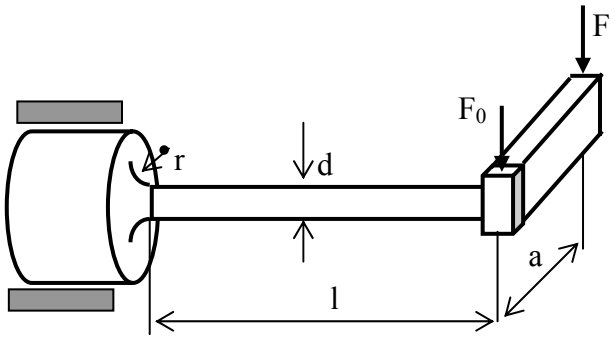


Fig.5.9.2-1

Rezolvare

Rezistențele la oboseală pentru OL50 sunt:

$$\sigma_0 = 420 \ \text{MPa} \qquad \sigma_{-1} = 240 \ \text{MPa} \qquad \psi_\sigma = 0{,}143$$
$$\tau_0 = 200 \ \text{MPa} \qquad \tau_{-1} = 150 \ \text{MPa} \qquad \psi_\tau = 0{,}2$$

iar factorii de influență au valorile:

$$K_\sigma = 2{,}04 \qquad \varepsilon_\sigma = 0{,}84 \qquad \gamma = 0{,}97$$
$$K_\tau = 1{,}5 \qquad \varepsilon_\tau = 0{,}78$$

Pentru coeficientul de siguranță la încovoiere:

$$\sigma_{max} = \frac{(F_0 + F_{max}) \cdot l}{W_z} = 10 + 0{,}625 \cdot F_{max}$$
$$\sigma_{min} = \frac{(F_0 - F_{max}) \cdot l}{W_z} = 10 - 0{,}625 \cdot F_{max}$$
$$\sigma_{am} = 0{,}625 \cdot F_{max}$$

$$\sigma_m = 10 \ \text{MPa}$$

$$c_\sigma = \frac{240}{1{,}56 \cdot F_{max} + 1{,}43}$$

Pentru coeficientul de siguranță la torsiune (ciclul este alternant simetric):

$$\tau_{max} = \frac{F_{max} \cdot a}{W_p} = 0{,}784 \cdot F_{max}$$

$$\tau_{min} = -\frac{F_{max} \cdot a}{W_p} = -0{,}784 \cdot F_{max}$$

$$\tau_{am} = 0{,}784 \cdot F_{max}$$

$$\tau_m = 0$$

Coeficientul de siguranță la torsiune, ciclu alternant simetric, este:

$$c_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\frac{K_\tau}{\varepsilon_\tau \cdot \gamma} \cdot \sigma_{am}} = \frac{150}{0{,}015 \cdot F_{max}}$$

Relația de verificare a rezistenței la oboseală este:

$$c_g = \frac{c_\sigma \cdot c_\tau}{\sqrt{c_\sigma^2 + c_\tau^2}} = \frac{\frac{240}{1{,}56 \cdot F_{max} + 1{,}43} \cdot \frac{150}{0{,}015 \cdot F_{max}}}{\sqrt{\left(\frac{240}{1{,}56 \cdot F_{max} + 1{,}43}\right)^2 + \left(\frac{150}{0{,}015 \cdot F_{max}}\right)^2}} = c_a$$

Din relația anterioară se obține valoarea maximă admisă pentru forța *F*:

$$F_{max} \approx 760 \ \ N$$

6. CALCULUL PLĂCILOR PLANE IZOTROPE

6.1 CONSIDERAȚII GENERALE

Plăcile sunt elemente care au două dimensiuni (lungimea şi lățimea) relativ mari în comparație cu cea de-a treia (grosimea).
În practică se întâlnesc multe elemente care intră în categoria plăcilor: cilindrii motoarelor, diferite rezervoare, supapele, pistoanele, conductele, planşeele, acoperişuri etc.

Studiul plăcilor este mult mai dificil decât cel al barelor şi acesta se face pe baza teoriei elasticității.

Elementele geometrice ale unei plăci sunt:

- *forma şi dimensiunile suprafeței mediane*
- *grosimea.*

Suprafața mediană este locul geometric al punctelor egal depărtate de suprafețele exterioare ale plăcii. După forma suprafeței mediane, plăcile pot fi.

- *plăci plane*
- *plăci curbe*
- *învelitori.*

Grosimea plăcii reprezintă distanța dintre două puncte ale suprafețelor exterioare, măsurată perpendicular pe suprafața mediană.

În funcție de mărimea grosimii h a plăcii şi de dimensiunea l cea mai mică a conturului, plăcile pot fi:

- *membrane*, plăci cu grosime foarte mică, $h \leq l/80$. Aceste plăci au o rigiditate neglijabilă la încovoiere şi preiau numai eforturi axiale,
- *plăci groase*, plăci cu grosime relativ mare, $h > l/5$. Calculul acestor plăci se face cu teoria spațială a elasticității, care este destul de dificilă.

După forma suprafeței mediane, plăcile plane pot fi:

- *circulare*
- *dreptunghiulare*
- *eliptice*
- *de alte forme.*

Calculul plăcilor curbe este mult mai complicat decât cel al plăcilor plane şi acesta interesează mai mult specialistul din construcții. Inginerul mecanic este interesat în special de plăcile plane şi învelitori, mai ales aceia care au preocupări în domeniul rezervoarelor de diferite tipuri.

Din punct de vedere mecanic, se consideră că plăcile rezistă oricăror sarcini.

Plăcile față de bare, prezintă anumite particularități cu privire la sarcini şi eforturi. Astfel, sarcinile aplicate plăcilor pot fi:

- *concentrate* [N]
- *distribuite liniar* [N/mm]
- *distribuite pe o suprafață* [N/mm^2].

Deoarece secțiunea unei plăci este mare, eforturile N, T, M_i , M_t , variază în lungul secțiunii. Din acest motiv, eforturile se calculează pe unitatea de lungime a secțiunii, şi au următoarele unități de măsură:

- efortul axial şi tăietor în [N/mm]
- momentul încovoietor şi de răsucire în [Nmm/mm] = [N].

În calculul plăcilor este valabilă ipoteza materialului izotrop şi legea lui Hooke. Plăcile plane care sunt simetrice din punct de vedere al formei, pot fi rezemate şi încărcate simetric, ceea ce simplifică mult calculele. De asemenea ele pot fi încărcate şi nesimetric.

Pentru plăcile plane sistemul de referință *xyz* are axele *x* şi *y* în planul suprafeței mediane, iar axa *z* perpendiculară pe acest plan.

6.2 CALCULUL LA ÎNCOVOIERE AL PLĂCILOR CIRCULARE ÎNCĂRCATE SIMETRIC

6.2.1 Relații între tensiuni şi deformații specifice

În urma acțiunii sarcinilor, placa se deformează, iar suprafața mediană devine o suprafață curbă numită *suprafață mediană deformată.* Deplasările *w* ale suprafeței mediane sunt mici în comparație cu grosimea plăcii. Ipotezei lui Bernoulli de la bare îi corespunde plăcilor *ipoteza lui Kirchhof* care precizează că *toate punctele aflate, înainte de deformație, pe o normală la planul median se găsesc după deformație pe o normală la suprafața mediană deformată*. Această ipoteză permite ca în studiul deformației plăcilor să se abordeze numai deformațiile suprafeței mediane.

În Fig.6.2.1-1 se consideră suprafața mediană a unei plăci circulare.

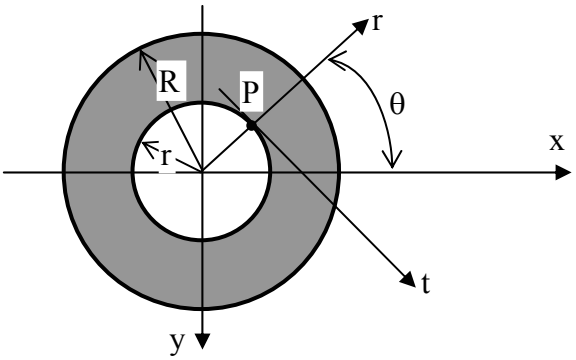


Fig.6.2.1-1

În locul coordonatelor carteziene *x, y* se pot considera coordonatele polare *r,* θ. În acest mod, orice mărime este independentă de θ, fiind funcție numai de *r*. Într-un punct curent al plăcii *P*, trebuie considerate două axe ortogonale: axa radială *Pr* şi axa circumferențială *Pt*.

Dacă se face o secțiune diametrală prin placa deformată se obține o curbă, care reprezintă intersecția suprafeței mediane deformate cu planul secțiunii (Fig.6.2.1-2). Într-un punct situat la distanța *r* de centrul plăcii, curba are săgeata *w* şi unghiul (rotirea) φ:

$$\varphi = -\frac{dw}{dr} \qquad 6.2.1\text{-}1$$

Semnul (-) apare deoarece *r* şi *w* sunt pozitive, iar φ este negativ.

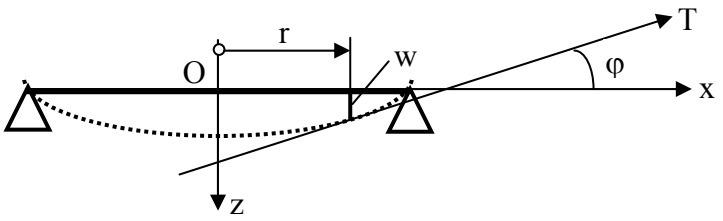


Fig.6.2.1-2

Când *r* creşte, creşte şi φ, iar *w* scade, ceea ce impune semnul minus în relația 6.2.1-1.

Fig.6.2.1-3 reprezintă o secțiune diametrală prin placă atât în stare nedeformată cât şi deformată. *AB* şi *CD* sunt două normale la placă situate la distanța *r* de *Oz*, respectiv la distanța *r+dr*. Fiind acceptată ipoteza lui Kirchhof, acestea devin normale şi pe suprafața mediană deformată *A'B', C'D'*.

Se consideră acum o fibră *MN* de lungime *dr*, situată la distanța *z* de suprafața mediană care după deformație ajunge în poziția *M''N''*. Normala *AB* s-a rotit cu unghiul φ, iar *CD* cu unghiul

$$\varphi + \frac{d\varphi}{dr} \cdot dr$$

Fibra *MN* care acum a ajuns în poziția *M''N''* s-a lungit cu o mărime egală cu diferența deplasărilor extremităților sale:

$$\Delta(dr) = N'N'' - M'M'' = z \cdot \left(\varphi + \frac{d\varphi}{dr} \cdot dr\right) - z \cdot \varphi = z \cdot \frac{d\varphi}{dr} \cdot dr \qquad 6.2.1\text{-}2$$

Lungirea specifică a fibrei în direcție radială este:

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta(dr)}{dr} = z \cdot \frac{d\varphi}{dr} \qquad 6.2.1\text{-}3$$

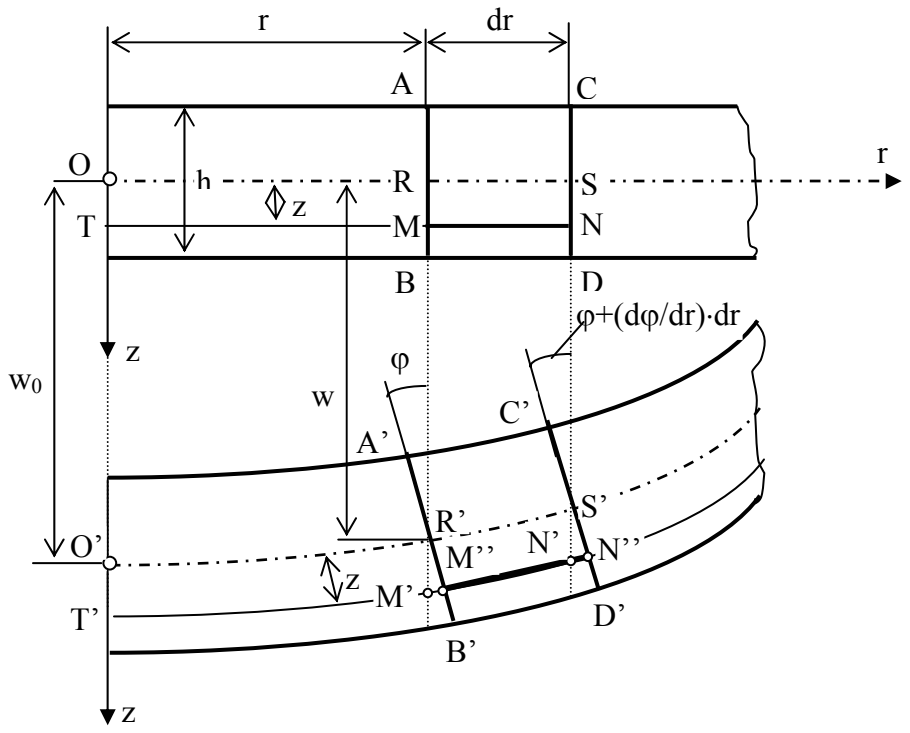


Fig.6.2.1-3

Cercul de rază *TM* = *r* are înainte de deformație lungimea:

$$s = 2 \cdot \pi \cdot r$$

iar după deformație raza cercului devine:

$$T'M'' = r + z \cdot \varphi$$

astfel încât lungimea sa este:

$$s + \Delta s = 2\pi \cdot (r + z \cdot \varphi)$$

Lungirea specifică în direcția circumferențială este acum:

$$\varepsilon_t = \frac{(s + \Delta s) - s}{s} = \frac{2\pi \cdot r + 2\pi \cdot z \cdot \varphi - 2\pi \cdot r}{2\pi \cdot r} = z \cdot \frac{\varphi}{r} \qquad 6.2.1\text{-}4$$

Din teoria elasticității (legea lui Hooke generalizată) sunt cunoscute relațiile dintre tensiuni şi deformațiile specifice:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\cdot\left(\varepsilon_x + \nu\cdot\varepsilon_y\right)$$
$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\cdot\left(\varepsilon_y + \nu\cdot\varepsilon_x\right)$$

care transpuse pentru cazul plăcii circulare capătă forma:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\cdot\left(\varepsilon_r + \nu\cdot\varepsilon_t\right)$$
$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2}\cdot\left(\varepsilon_t + \nu\cdot\varepsilon_r\right) \qquad 6.2.1\text{-}5$$

Dacă se ține seama de expresiile deformațiilor specifice stabilite în cazul plăcii circulare, relațiile 6.2.1-5 devin:

$$\sigma_r = \frac{E\cdot z}{1-\nu^2}\cdot\left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu\cdot\frac{\varphi}{r}\right)$$
$$\sigma_t = \frac{E\cdot z}{1-\nu^2}\cdot\left(\frac{\varphi}{r} + \nu\cdot\frac{d\varphi}{dr}\right) \qquad 6.2.1\text{-}6$$

Relațiile 6.2.1-6 permit calculul tensiunilor radiale şi circumferențiale dintr-un punct situat la distanța z de planul median. Dar, pentru aceasta, trebuie cunoscută funcția $\varphi(r)$. Se poate constata că în planul median unde $z = 0$, atât tensiunea radială cât şi cea circumferențială sunt nule.

6.2.2 Echilibrul elementului de placă

Din placa circulară se detaşează un element de volum, cu ajutorul a două suprafețe cilindrice, concentrice cu placa, de raze r şi $r+dr$ şi două plane diametrale normale pe placă, care fac între ele un unghi $d\theta$ (Fig.6.2.2-1).

Pe cele două suprafețe plane normale la direcția circumferențială acționează *tensiunile circumferențiale* σ_t, iar pe suprafețele cilindrice, *tensiunile radiale* σ_r. Tensiunile circumferențiale sunt egale pe cele două suprafețe, iar tensiunea radială are valoarea σ_r la raza r şi valoarea $\sigma_r + (d\sigma_r / dr)\cdot dr$ pe suprafața de rază $r + dr$.

În Fig.6.2.2-1 tensiunile au fost reprezentate pe suprafața situată la distanța *z* de suprafața mediană $N_1N_2N_3N_4$.
Pe cele patru suprafețe (două plane şi două cilindrice) iau naştere eforturile *N, T,* M_i, M_t.

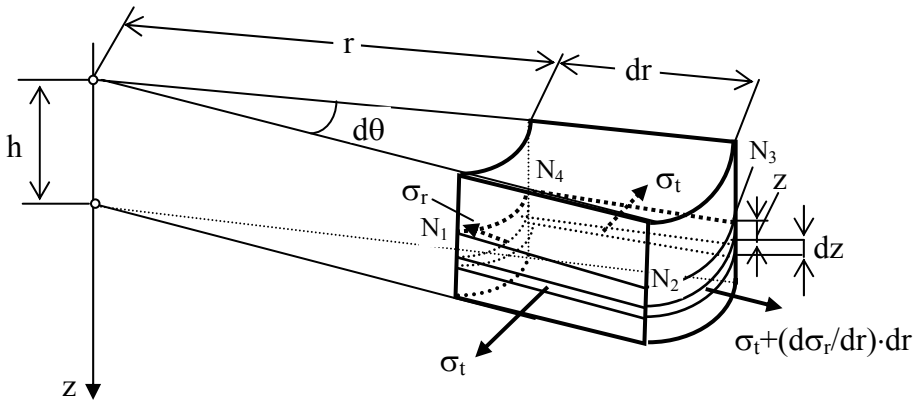


Fig.6.2.2-1

Dacă placa se încarcă numai cu sarcini normale pe planul ei, atunci asupra elementului acționează numai efortul tăietor *T* şi momentul încovoietor $M_i = M$ (Fig.6.2.2-2).

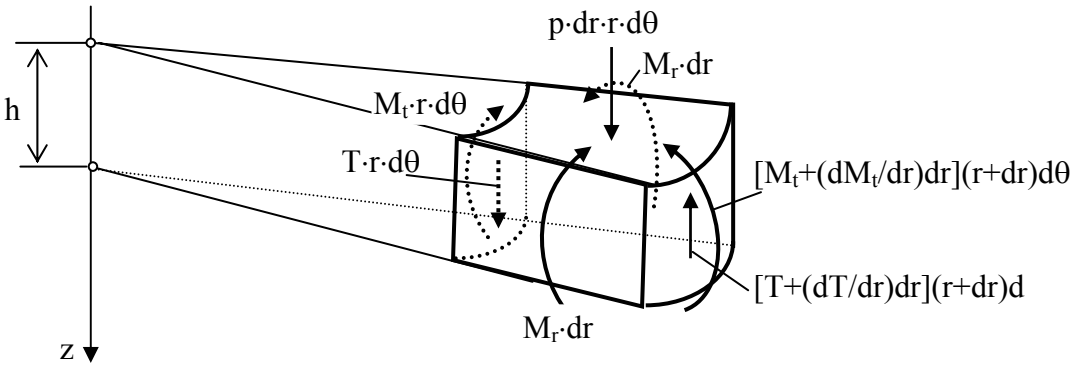


Fig.6.2.2-2

Pe suprafețele plane acționează *momente încovoietoare radiale distribuite* M_r care se măsoară pe unitatea de lungime a razei. Pe întreaga față a elementului momentul încovoietor radial este $M_r \cdot dr$, care este acelaşi pe fiecare față plană (din considerente de simetrie). Pe aceste fețe nu există efort tăietor. Pe suprafața cilindrică interioară acționează momentul încovoietor circumferențial $M_t \cdot r \cdot d\theta$, iar pe suprafața cilindrică exterioară, momentul circumferențial:

$$\left(M_t + \frac{dM_t}{dr} \cdot dr\right) \cdot (r + dr) \cdot d\theta$$

Pe aceste suprafețe există şi forțe tăietoare.
Pe suprafața superioară a elementului se aplică o sarcină normală egală cu $p \cdot dr \cdot r \cdot d\theta$. Momentele forțelor elementare față de suprafața mediană sunt egale cu momentele încovoietoare din secțiune. Astfel, pe suprafața cilindrică interioară de rază r, se poate scrie:

$$M_t \cdot r\,d\theta = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_r \cdot dA \cdot z = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E\,z}{1-\nu^2} \cdot \left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu \cdot \frac{\varphi}{r}\right) \cdot r \cdot d\theta \cdot dz \cdot z$$

unde s-a ținut seama de expresia lui σ_r şi că $dA = r\,d\theta\,dz$. Rezolvând relația de mai sus se obține:

$$M_t \cdot r\,d\theta = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu \cdot \frac{\varphi}{r}\right) \cdot r \cdot d\theta \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2\,dz = \frac{E\,h^3}{12\left(1-\nu^2\right)} \cdot \left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu \cdot \frac{\varphi}{r}\right) \cdot r \cdot d\theta$$

Expresia

$$D = \frac{E\,h^3}{12 \cdot \left(1-\nu^2\right)} \qquad 6.2.2\text{-}1$$

se numeşte *rigiditatea la încovoiere a plăcii.*
Rezultă atunci că expresia momentului încovoietor circumferențial este:

$$M_t = D \cdot \left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu \cdot \frac{\varphi}{r}\right) \qquad 6.2.2\text{-}2$$

Asemănător, dacă se scrie relația de echivalență în secțiunea radială, se obține:

$$M_r \cdot dr = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_r \cdot dA \cdot z = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{E\,z}{1-\nu^2} \cdot \left(\frac{\varphi}{r} + \nu \cdot \frac{d\varphi}{dr}\right) \cdot dr \cdot dz \cdot z$$

de unde după efectuarea calculelor rezultă expresia momentului încovoietor radial:

$$M_r = D \cdot \left(\frac{\varphi}{r} + \nu \cdot \frac{d\varphi}{dr}\right) \qquad 6.2.2\text{-}3$$

S-au obținut astfel relațiile momentelor încovoietoare circumferențiale, respectiv radiale, în funcție de funcția φ. Din expresiile tensiunilor (relațiile 6.2.1-6) şi a momentelor (relațiile 6.2.2-2 şi 6.2.2-3) rezultă că acestea sunt funcții de funcția necunoscută *φ(r)*. Eliminând funcția φ între aceste mărimi, se obțin relațiile dintre tensiuni (radiale, respectiv circumferențiale) şi momentele încovoietoare:

$$\sigma_r = \frac{E\,z}{1-\nu^2}\cdot\frac{M_t}{D}$$
$$\sigma_t = \frac{E\,z}{1-\nu^2}\cdot\frac{M_r}{D} \qquad 6.2.2\text{-}4$$

sau dacă se ține seama de expresia lui *D* (relația 6.2.2-1) rezultă:

$$\sigma_r = \frac{12\,M_t}{h^3}\cdot z$$
$$\sigma_t = \frac{12\,M_r}{h^3}\cdot z \qquad 6.2.2\text{-}5$$

Relațiile 6.2.2-5 arată că tensiunea variază liniar cu grosimea plăcii, obținându-se aceeaşi concluzie că în suprafața mediană (*z = 0*) ambele tensiuni sunt nule. Valorile maxime se ating în fibrele extreme unde $z = z_{max} = h/2$:

$$\sigma_{r\,max} = \frac{M_t}{\frac{h^2}{6}} = \frac{M_t}{W}$$
$$\sigma_t = \frac{M_r}{\frac{h^2}{6}} = \frac{M_r}{W} \qquad 6.2.2\text{-}6$$

Se poate constata că relațiile 6.2.2-6 sunt asemănătoare cu cele de la solicitarea de încovoiere, cu observația că momentele încovoietoare se măsoară în [*N*] iar modulul *W* în [mm^2].

Pentru determinarea funcției *φ(r)* se pune condiția ca elementul de placă (Fig.6.2.2-2) să fie în echilibru sub acțiunea eforturilor care acționează asupra lor. Pentru aceasta, se va reprezenta elementul de volum prin două proiecții (Fig.6.2.2-3). În prima proiecție (Fig.6.2.2-3a) se reprezintă momentele încovoietoare şi forțele tăietoare aplicate, considerând în mod simplificat că forțele tăietoare sunt constante pe cele două suprafețe opuse. În proiecția din Fig.6.2.2-3b, se reprezintă toate momentele încovoietoare prin vectori, inclusiv cuplul $T\cdot r\,d\theta\cdot dr$ al celor două forțe tăietoare. Condiția de echilibru se scrie ca o sumă de forțe pe tangenta la conturul cilindric al elementului:

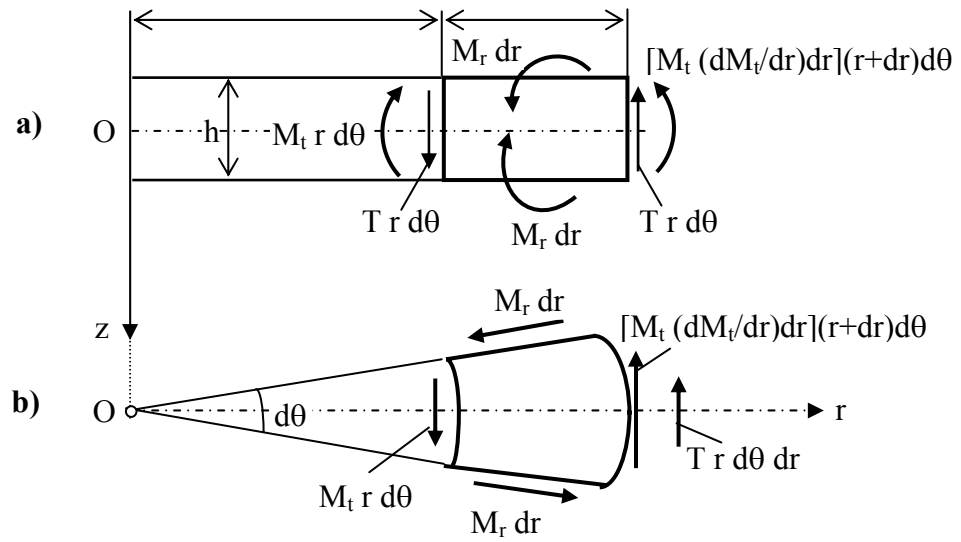


Fig.6.2.2-3

$$\left(M_t + \frac{dM_t}{dr}\cdot dr\right)\cdot(r+dr)d\theta - M_t \cdot r\,d\theta + T\cdot r\,d\theta\cdot dr -$$
$$-2\,M_r\cdot dr\cdot\frac{d\theta}{2} + p\cdot r\,d\theta\cdot dr\cdot\frac{dr}{2} = 0$$

În relația de mai sus, s-a considerat că

$$\sin\frac{d\theta}{dr} \approx \frac{d\theta}{2}$$

După efectuarea calculelor se ajunge la relația:

$$M_t + \frac{dM_t}{dr}\cdot r + \frac{dM_t}{dr}\cdot dr + T\,r - M_r = 0$$
$$\text{dar}\quad \frac{dM_t}{dr}\cdot dr \approx 0$$

de unde rezultă:

$$M_t + \frac{dM_t}{dr}\cdot r + T\,r - M_r = 0 \qquad 6.2.2\text{-}7$$

Dacă se înlocuiesc valorile momentelor încovoietoare (relațiile 6.2.2-2 respectiv 6.2.2-3), relația 6.2.2-7 se poate scrie:

$$D\left(\frac{d\varphi}{dr}+\nu\cdot\frac{\varphi}{r}\right)+rD\frac{d}{dr}\left(\frac{d\varphi}{dr}+\nu\cdot\frac{\varphi}{r}\right)+Tr-D\left(\frac{\varphi}{r}+\nu\cdot\frac{d\varphi}{dr}\right)=0$$

Efectuând calculele rezultă:

$$\frac{d\varphi}{dr}+\nu\frac{\varphi}{r}+r\cdot\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\nu\frac{r\frac{d\varphi}{dr}-\varphi}{r^2}\right)-\frac{\varphi}{r}-\nu\frac{d\varphi}{dr}=-\frac{T\cdot r}{D}$$

care în final conduc la:

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{d\varphi}{dr}-\frac{1}{r^2}\cdot\varphi=-\frac{T}{D} \qquad 6.2.2\text{-}8$$

Pentru plăcile circulare, forța tăietoare pe o secțiune cilindrică de rază *r* este egală cu suma proiecțiilor pe normala la suprafața mediană a forțelor din interiorul cercului de rază *r*.

Fie acum o placă circulară încărcată simetric printr-o forță *F* aplicată în centru şi o sarcină uniform distribuită *p*. Pentru această placă, se poate scrie:

$$2\pi r T = F + \pi r^2 p$$

$$\Rightarrow \quad T=\frac{F}{2\pi r}+\frac{pr}{2}$$

iar ecuația diferențială 6.2.2-8 devine:

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{d\varphi}{dr}-\frac{1}{r^2}\cdot\varphi=-\frac{1}{D}\cdot\left(\frac{F}{2\pi r}+\frac{pr}{2}\right) \qquad 6.2.2\text{-}9$$

Membrul întâi al expresiei de mai sus este tocmai derivata expresiei

$$\frac{1}{r}\cdot\left(\varphi+r\cdot\frac{d\varphi}{dr}\right)$$

Ecuația diferențială 6.2.2-9 poate fi scrisă acum sub forma:

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\left(\varphi + r\cdot\frac{d\varphi}{dr}\right)\right] = -\frac{1}{D}\cdot\left(\frac{F}{2\pi r} + \frac{pr}{2}\right)$$

care integrată conduce la:

$$\frac{1}{r}\cdot\left(\varphi + r\cdot\frac{d\varphi}{dr}\right) = -\frac{1}{D}\cdot\left(\frac{F}{2\pi}\cdot\ln r + \frac{pr^2}{4}\right) + A$$

iar după înmulțire cu *r*

$$\varphi + r\cdot\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{1}{D}\cdot\left(\frac{F}{2\pi}\cdot r\cdot\ln r + \frac{pr^3}{4} + Ar\right)$$

Se integrează din nou, observându-se că membrul întâi este derivata lui φr , iar $\int r \ln r\, dr$ se face prin părți:

$$\int r\ln r\,dr = \frac{r^2}{2}\cdot\ln r - \int\frac{r^2}{2}\cdot\frac{dr}{r} = \frac{r^2}{2}\cdot\ln r - \frac{r^2}{4}$$

$$\varphi r = -\frac{1}{D}\cdot\left(\frac{F}{2\pi}\cdot\frac{r^2}{2}\cdot\ln r - \frac{F}{2\pi}\cdot\frac{r^2}{4} + \frac{pr^4}{16}\right) + A\cdot\frac{r^2}{2} + B$$

După împărțire cu *r* se obține expresia funcției φ:

$$\varphi = -\frac{pr^3}{16D} - \frac{Fr}{8\pi D}\cdot(2\ln r - 1) + A\cdot\frac{r}{2} + \frac{B}{r} \qquad 6.2.2\text{-}10$$

Dacă se mai integrează o dată ecuația 6.2.2-10 şi ținând seama de relația 6.2.1-1 după ce i s-a schimbat semnul se obține expresia deplasării pe direcția *z*:

$$w = \frac{pr^4}{64D} + \frac{F}{8\pi D}\cdot\int r\cdot(2\ln r - 1)\cdot dr - A\cdot\frac{r^2}{4} + B\ln r + C \qquad 6.2.2\text{-}11$$

Dar cum integrala este:

$$\int(2r\ln r - r)\cdot dr = r^2\ln r - \frac{r^2}{2} - \frac{r^2}{2} = r^2\cdot(\ln r - 1)$$

ecuația 6.2.2-11 devine:

$$w = \frac{p r^4}{64 D} + \frac{F r^2}{8\pi D} \cdot (\ln r - 1) - A \cdot \frac{r^2}{4} + B \ln r + C \qquad 6.2.2\text{-}12$$

Cu ajutorul relațiilor 6.2.2-10 şi 6.2.2-12 se pot calcula plăcile circulare încărcate cu o forță concentrată în centru şi cu sarcină distribuită pe toată suprafața. Constantele de integrare *A, B, C* care intervin în aceste relații, se determină pentru fiecare caz în parte, punând condițiile la limită.

6.2.3 Calculul plăcii circulare încărcată cu o sarcină uniform distribuită şi încastrată pe contur

Pentru placa circulară încastrată pe contur şi încărcată cu o sarcină distribuită pe toată suprafața sa (Fig.6.2.3-1), în relațiile 6.2.2-10 şi 6.2.2.12 se ia $F = 0$, iar forma lor devine:

$$\varphi = -\frac{p r^3}{16 D} + A \cdot \frac{r}{2} + \frac{B}{r} \qquad 6.2.3\text{-}1$$

$$w = \frac{p r^4}{64 D} - A \cdot \frac{r^2}{4} + B \ln r + C \qquad 6.2.3\text{-}2$$

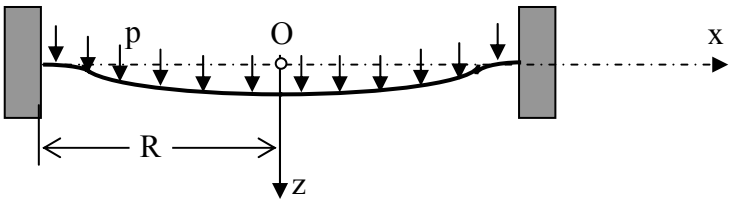


Fig.6.2.3-1

Constantele *A,B* şi *C* se determină punând condițiile la limită:

- pe contur, la $r = R$ avem $\varphi = 0$ şi $w = 0$
- în centrul plăcii, la $r = 0$ avem $\varphi = 0$.

Dacă se înlocuiesc aceste condiții în relațiile 6.2.3-1 şi 6.2.3-2, se obțin constantele de integrare:

$$B = 0$$

$$0 = -\frac{pR^3}{16D} + A \cdot \frac{R}{2} \Rightarrow A = \frac{pR^2}{8D}$$

$$0 = \frac{pR^4}{64D} - \frac{pR^2}{8D} \cdot \frac{R^2}{4} + C \Rightarrow C = \frac{pR^4}{64D}$$

Cu valorile constantelor de integrare, relațiile deplasării *w* şi a rotirii φ (relațiile 6.2.3-2 şi 6.2.3-1) devin:

$$w = \frac{p}{64D} \cdot \left(R^2 - r^2\right)$$
$$\varphi = \frac{pr}{16D} \cdot \left(R^2 - r^2\right) \qquad 6.2.3\text{-}3$$

Relațiile 6.2.3-3 permit calculul deformațiilor în orice punct situat la distanța *r* de centrul plăcii.

Săgeata maximă se obține în centrul plăcii, acolo unde *r = 0:*

$$w_{max} = \frac{pR^4}{64D} \qquad 6.2.3\text{-}4$$

Săgeata *w* a plăcii (relația 6.2.3-3) poate fi exprimată funcție de săgeata maximă w_{max}:

$$w = \frac{pR^4}{64D} \cdot \left(1 + \frac{r^4}{R^4} - 2 \cdot \frac{r^2}{R^2}\right) = w_{max} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2 \qquad 6.2.3\text{-}5$$

Dacă se cunosc expresiile deformațiilor *w* şi φ se pot determina momentele din secțiunile plăcii (relațiile 6.2.2-2 şi 6.2.2-3):

$$\frac{\varphi}{r} = \frac{p}{16D} \cdot \left(R^2 - r^2\right)$$
$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{p}{16D} \cdot \left(R^2 - 3r^2\right)$$

$$\Rightarrow M_r = \frac{p}{16}\cdot\left(R^2 - r^2\right) + \nu\frac{p}{16}\cdot\left(R^3 - 3r^2\right) = \frac{p}{16}\cdot\left[R^2\cdot(1+\nu) - r^2\cdot(1+3\nu)\right] \quad 6.2.3\text{-}6a$$

respectiv,

$$\Rightarrow M_t = \frac{p}{16}\cdot\left(R^2 - 3r^2\right) + \nu\frac{p}{16}\cdot\left(R^3 - r^2\right) = \frac{p}{16}\cdot\left[R^2\cdot(1+\nu) - r^2\cdot(3+\nu)\right] \quad 6.2.3\text{-}6b$$

Dacă se consideră $\nu = 0,3$ ecuațiile momentelor încovoietoare (relațiile 6.2.3-6) au forma:

$$\begin{aligned} M_r &= \frac{p}{16}\cdot\left(1,3R^2 - 1,9r^2\right) \\ M_t &= \frac{p}{16}\cdot\left(1,3R^2 - 3,3r^2\right) \end{aligned} \qquad 6.2.3\text{-}7$$

Relațiile 6.2.3-7 arată că momentele încovoietoare (radial, respectiv circumferențoial) variază parabolic cu raza *r*. Astfel:

- *Momentul radial Mr*
  - În centrul plăcii are valoarea la $r = 0$

$$M_r^{'} = \frac{1,3}{16}\cdot pR^2 = 0,0812\cdot pR^2$$

  - Pe contur la $r = R$

$$M_r^{''} = -\frac{0,6}{16}\cdot pR^2 = -0,0375\cdot pR^2$$

Se poate observa că există o distanță de la centru pentru care acest moment se anulează. Din condiția ca $M_r = 0$ se obține distanța *r* la care momentul M_r este nul:

$$1.3\ {}^2R - 1,9r^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad r = 0,827R$$

- *Momentul circumferențial M_t*
  - În centrul plăcii are valoarea

$$M_t^{'} = M_r^{'} = \frac{1,3}{16}\cdot pR^2 = 0,0812\cdot pR^2$$

  - Pe conturul plăcii

$$M_t'' = -\frac{1}{8}\cdot pR^2 = -0{,}125\cdot pR^2$$

Acest moment se anulează când

$$1.3\ ^2R - 3,,3r^2 = 0 \ \Rightarrow\ r = 0{,}628R$$

Diagramele momentelor încovoietoare pentru această placă sunt prezentate în Fig.6.2.3-2.

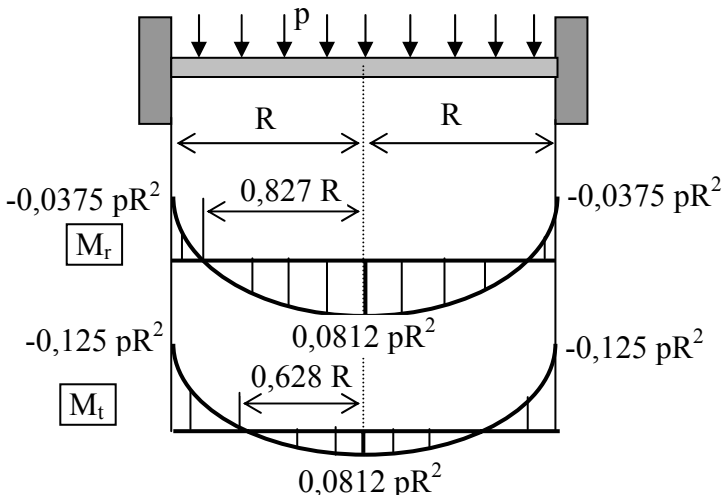


Fig.6.2.3-2

Dacă se cunosc acum momentele încovoietoare, cu ajutorul relațiilor 6.2.2-6 se pot determina tensiunile normale din placă:

- În centrul plăcii:

$$\sigma_r = \sigma_t = \frac{6}{h^2}\cdot M_t = 0.487\cdot\frac{pR^2}{h^2} \qquad 6.2.3\text{-}8$$

- Pe conturul plăcii:

$$\sigma_r = \frac{6}{h^2}\cdot M_t = 6\cdot 0.125\cdot\frac{pR^2}{h^2} = \frac{3}{4}\cdot\frac{pR^2}{h^2}$$
$$\sigma_t = \frac{6}{h^2}\cdot M_r = 0.225\cdot\frac{pR^2}{h^2} \qquad 6.2.3\text{-}9$$

Cea mai mare tensiune este tensiunea radială σ_r şi se atinge pe conturul plăcii. Dacă se face un calcul de dimensionare după teoria I de rezistență, în cazul plăcii studiate se obține pentru grosimea acesteia:

$$\sigma_a = \frac{3}{4} \cdot \frac{pR^2}{h^2} \quad \Rightarrow \quad h = R \cdot \sqrt{\frac{3p}{4\sigma_a}} \approx 0{,}866\,R\sqrt{\frac{p}{\sigma_a}} \qquad 6.2.3\text{-}10$$

6.2.4 Calculul plăcii circulare încărcată cu o sarcină uniform distribuită şi simplu rezemată pe contur

Pentru acest tip de placă raționamentul este acelaşi, numai condițiile la limită sunt altele. Se porneşte de la relațiile 6.2.3-1 şi 6.2.3-2:

$$w = \frac{pr^4}{64D} - A \cdot \frac{r^2}{4} + B\ln r + C \qquad 6.2.4\text{-}1a$$

$$\varphi = -\frac{pr^3}{16D} + A \cdot \frac{r}{2} + \frac{B}{r} \qquad 6.2.4\text{-}1b$$

Pentru determinarea constantelor din relațiile de mai sus, în cazul acestei plăci, condițiile la limită sunt:

- În centrul plăcii:

$$\text{Pentru } r = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 0$$

- Pe conturul plăcii:

$$\text{Pentru } r = R \quad \Rightarrow \quad w = 0$$

Se poate constata că cele două relații nu sunt suficiente pentru determinarea celor trei necunoscute. Ca urmare, mai este necesară încă o relație. Pentru găsirea celei de-a treia relație, din placă se izolează o fâşie mică de lățime Δ (Fig.6.2.4-1), care poate fi asemuită cu o grindă simplu rezemată la capete.

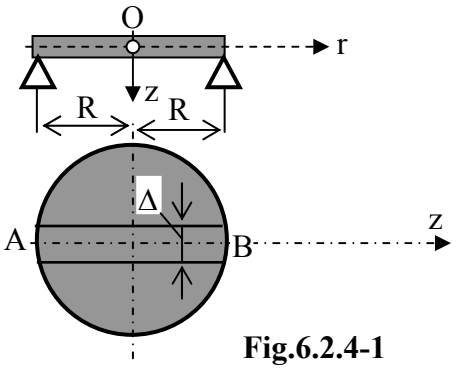


Fig.6.2.4-1

Aceasta prezintă pe reazeme, în direcție radială, tensiune nulă $\sigma_r = 0$.
După cum se ştie, tensiunea radială este produsă de către momentul circumferențial M_t, ceea ce înseamnă că pe contur momentul $M_t = 0$.

Dacă se înlocuiesc primele condiții în relațiile 6.2.4-1, se obține:

$$B = 0 \quad ; \quad 0 = \frac{pR^4}{64D} - A\frac{R^2}{4} - C \qquad 6.2.4\text{-}2$$

Pentru a obține ecuația suplimentară necesară, se scrie expresia momentului circumferențial M_t având în vedere că $B = 0$. Cunoscând:

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{pr^3}{16D} + A\frac{r}{2} \\ \frac{\varphi}{r} &= -\frac{pr^2}{16D} + \frac{A}{2} \\ \frac{d\varphi}{dr} &= -\frac{3pr^2}{16D} + \frac{A}{2} \end{aligned} \qquad 6.2.4\text{-}3$$

ecuația momentului circumferențial are forma:

$$M_t = D \cdot \left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu \frac{\varphi}{r} \right) = -\frac{3pr^2}{16} - \nu \frac{pr^2}{16} + \frac{A \cdot D}{2} + \nu \frac{A \cdot D}{2}$$

Punând condiția ca la $r = 0$ să fie $M_t = 0$, se obține o relație în constanta A şi care ataşată relațiilor 6.2.4-2 conduce la determinarea constantelor de integrare:

$$0 = -\frac{3pR^2}{16} - \nu \frac{pR^2}{16} + \frac{A \cdot D}{2} \cdot (1 + \nu)$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{pR^2}{8D} \cdot \frac{3 + \nu}{1 + \nu} \quad ; \quad C = \frac{pR^4}{64D} \cdot \frac{5 + \nu}{1 + \nu} \qquad 6.2.4\text{-}4$$

Dacă se înlocuiesc acum constantele de integrare, se obțin pentru deformațiile plăcii, următoarele expresii:

$$w = \frac{pR^4}{64D} \cdot \left(\frac{5 + \nu}{1 + \nu} - \frac{2r^2}{R^2} \cdot \frac{3 + \nu}{1 + \nu} + \frac{r^4}{R^4} \right) \qquad 6.2.4\text{-}5a$$

$$\varphi = -\frac{d\varphi}{dr} = \frac{p r^3}{16 D} \cdot \left(\frac{R^2}{r^2} \cdot \frac{3+\nu}{1+\nu} - 1 \right) \qquad 6.2.4\text{-}5b$$

Săgeata maximă are loc în centrul plăcii unde *r = 0*. Pentru oțeluri cu *ν =0,3*, săgeata maximă este:

$$w_{max} = \frac{p R^4}{64 D} \cdot \left(\frac{5+\nu}{1+\nu} \right) = 4.07 \cdot \frac{p R^4}{64 D} \qquad 6.2.4\text{-}6$$

La o analiză atentă se poate constata că săgeata maximă la placa simplu rezemată, este de patru ori mai mare decât la aceeaşi placă dar încastrată pe contur.

Rotirea este maximă pe conturul plăcii, acolo unde *r = R:*

$$\varphi_{max} = \frac{p R^3}{16 D} \cdot \left(\frac{3+\nu}{1+\nu} - 1 \right) = 1{,}54 \cdot \frac{p R^3}{16 D} \qquad 6.2.4\text{-}7$$

Cunoscând expresiile deformațiilor se poate trece acum la determinarea momentelor din secțiunile transversale ale plăcii. Înainte se calculează expresiile:

$$\frac{\varphi}{r} = -\frac{p r^2}{16 D} + \frac{p R^2}{16 D} \cdot \frac{3+\nu}{1+\nu}$$

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{3 p r^2}{16 D} + \frac{p R^2}{16 D} \cdot \frac{3+\nu}{1+\nu}$$

care permit determinarea momentelor încovoietoare:

$$M_r = D \cdot \left(\frac{\varphi}{r} + \nu \frac{d\varphi}{dr} \right) = \frac{p}{16} \left[R^2 \cdot (3+\nu) - r^2 \cdot (1+3\nu) \right] \qquad 6.2.4\text{-}8$$

$$M_t = D \cdot \left(\frac{d\varphi}{dr} + \nu \frac{\varphi}{r} \right) = \frac{p}{16} \cdot (3+\nu) \cdot \left(R^2 - r^2 \right) \qquad 6.2.4\text{-}9$$

Momentele, după cum se poate constata şi pentru această placă, au o variație parabolică cu raza. Valorile lor extreme este următoarea:

- *Momentul Mr.*
  - În centrul plăcii, la *r = 0* şi pentru *ν = 0,3*

$$M_r^{'} = \frac{3+\nu}{16} \cdot p R^2 = 0{,}206\, p R^2$$

- Pe contur, unde $r = R$

$$M_r^{''} = \frac{p R^2}{16} \cdot (3 + \nu - 1 - 3\nu) = 0{,}0875\, p R^2$$

- *Momentul M_t.*
  - În centru, unde $r = 0$

$$M_t^{'} = M_r^{'} = 0{,}206\, p R^2$$

  - Pe conturul plăcii, la $r = R$

$$M_t^{''} = 0$$

Diagramele momentelor M_r , M_t sunt prezentate în Fig.6.2.4-2.

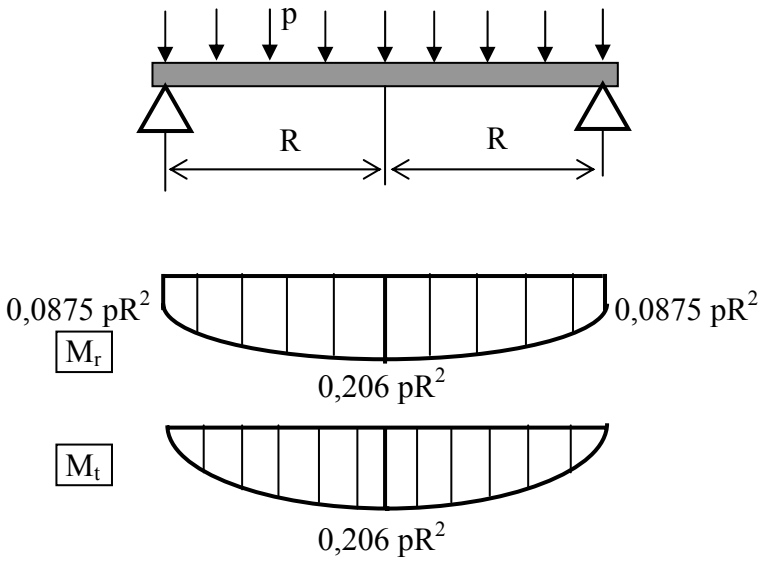


Fig.6.2.4-2

Tensiunea maximă se produce în centrul plăcii unde momentele sunt egale şi au valori maxime:

$$\sigma_{max} = \frac{6}{h^2} \cdot M_{max} = \frac{6}{h^2} \cdot \frac{3+\nu}{16} \cdot p R^2 = 1{,}237 \cdot \frac{p R^2}{h^2} \qquad 6.2.4\text{-}10$$

Dimensionarea plăcii făcută pe baza teoriei I de rezistență, conduce la:

$$h = R \cdot \sqrt{\frac{1{,}237\,p}{\sigma_a}} = 1{,}11\,R\sqrt{\frac{p}{\sigma_a}} \qquad 6.2.4\text{-}11$$

Făcând o comparație cu dimensiunea stabilită pentru aceeaşi placă dar încastrată pe contur, se constată că placa simplu rezemată are o grosime mai mare.

6.2.5 Calculul plăcii circulare încărcată cu o forță concentrată în centru şi înțepenită pe contur

Şi în acest studiu se porneşte de la aceleaşi relații ale deformațiilor plăcilor circulare (relațiile 6.2.3-1, respectiv 6.2.3-2), în care de data aceasta se face *p = 0:*

$$w = \frac{F r^2}{8\pi D}\cdot(\ln r - 1) - A\cdot\frac{r^2}{4} - B\ln r + C$$
$$\varphi = -\frac{F r}{8\pi D}\cdot(2\ln r - 1) + A\cdot\frac{r}{2} + \frac{B}{r} \qquad 6.2.5\text{-}1$$

Pentru determinarea constantelor de integrare se pun condițiile la limită:

- În centru, la *r = 0*

$$w = 0$$

- Pe contur, la *r = R*

$$w = 0 \quad ; \quad \varphi = 0$$

Se înlocuiesc acum condițiile la limită în ecuația lui φ având însă în vedere că:

$$(r\ln r)_{r=0} = 0$$

$$0 = -\frac{F R}{8\pi D}(2\ln R - 1) + A\cdot\frac{R}{2} + \frac{B}{R}\cdot$$

$$\Rightarrow\ B = 0 \quad \text{şi} \quad A = \frac{F}{4\pi D}\cdot(2\ln R - 1)$$

Făcând substituțiile şi în deformația *w,* se obține:

$$w = \frac{F\,r^2}{8\,\pi\,D}\cdot(\ln r - 1) - \frac{F\,r^2}{16\,\pi\,D}\cdot(2\ln R - 1) + C = \frac{F\,r^2}{8\,\pi\,D}\cdot\left(\ln\frac{r}{R} - \frac{1}{2}\right) + C$$

Punând condiția ca la *r = R,* să avem *w = 0*, rezultă:

$$0 = \frac{F\,R^2}{8\,\pi\,D}\cdot\left(0 - \frac{1}{2}\right) + C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{F\,R^2}{16\,\pi\,D}$$

Cu valorile găsite pentru constantele de integrare, relațiile deformațiilor capătă forma:

$$\begin{aligned} w &= \frac{F\,r^2}{8\,\pi\,D}\cdot\ln\frac{r}{R} + \frac{F}{16\,\pi\,D}\cdot\left(R^2 - r^2\right) \\ \varphi &= \frac{F\,r^2}{8\,\pi\,D}\cdot 2\,\ln\frac{R}{r} = \frac{F\,r}{4\pi\,D}\cdot\ln\frac{R}{r} \end{aligned} \qquad 6.2.5\text{-}2$$

Săgeata maximă se produce în centrul plăcii, la *r = 0:*

$$w_{max} = \frac{F\,R^2}{16\,\pi\,D} \qquad 6.2.5\text{-}3$$

Pentru calculul momentelor încovoietoare, ca la exemplele precedente se ține seama de expresia lui φ, a lui φ/*r* şi se calculează

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{F}{4\,\pi\,D}\cdot\left(\ln\frac{R}{r} - 1\right)$$

de unde apoi se obține:

$$\begin{aligned} M_r &= \frac{F}{4\,\pi}\left[(1+\nu)\cdot\ln\frac{R}{r} - \nu\right] \\ M_t &= \frac{F}{4\,\pi}\left[(1+\nu)\cdot\ln\frac{R}{r} - 1\right] \end{aligned} \qquad 6.2.5\text{-}4$$

Pe contur, la *r = R,* momentele încovoietoare au valorile:

$$M_r = -\frac{F\,\nu}{4\,\pi} \quad ; \quad M_t = -\frac{F}{4\,\pi} \qquad 6.2.5\text{-}5$$

Cu valorile momentelor încovoietoare găsite, se calculează acum tensiunile normale pe contur:

$$\sigma_r = \frac{6}{h^2} \cdot M_t = \frac{3F}{2\pi h^2} = 0{,}478 \cdot \frac{F}{h^2}$$
$$\sigma_t = \frac{6}{h^2} \cdot M_t = \frac{3F\nu}{2\pi h^2} = 0{,}144 \cdot \frac{F}{h^2} \qquad 6.2.5\text{-}6$$

În centrul plăcii, datorită aplicării locale a forței *F*, tensiunile au valoare infinită. Totuşi, un calcul aproximativ al tensiunii în punctul central de pe suprafața opusă aplicării forței, conduce la valoarea tensiunii maxime:

$$\sigma_{max} = (1+\nu) \cdot \frac{F^2}{h^2} \cdot \left(0{,}485 \ln \frac{R}{h} + 0{,}52\right) \qquad 6.2.5\text{-}7$$

Se face acum ipoteza că placa este solicitată de o forță concentrată egală cu rezultanta sarcinii uniform distribuite:

$$F = \pi R^2 p$$

Cu această valoare pentru forța *F*, se obțin tensiunile pe contur:

$$\sigma_r = 0{,}478 \cdot \frac{\pi R^2 p}{h^2} = 1{,}5 \cdot \frac{p R^2}{h^2}$$
$$\sigma_t = 0{,}144 \cdot \frac{\pi R^2 p}{h^2} = 0{,}45 \cdot \frac{p R^2}{h^2} \qquad 6.2.5\text{-}8$$

Comparând aceste valori cu cele la placa încastrată pe contur încărcată cu sarcina uniform distribuită *p*:

$$\sigma_{r,p} = 0{,}75 \cdot \frac{p R^2}{h^2}$$
$$\sigma_{t,p} = 0{,}225 \cdot \frac{p R^2}{h^2} \qquad 6.2.5\text{-}9$$

se constată că la placa încărcată cu aceeaşi sarcină rezultantă dar aplicată concentrat în centrul plăcii, tensiunile sunt de două ori mai mari. Rezultă de aici că pentru o placă circulară este mai convenabil să se încarce cu o sarcină distribuită pe toată suprafața decât cu o sarcină echivalentă aplicată concentrat în centrul plăcii.

6.3 CALCULUL LA ÎNCOVOIERE AL PLĂCILOR DREPTUNGHIULARE

La calculul plăcilor dreptunghiulare se consideră că *momentele încovoietoare* sunt distribuite în lungul axelor *x* şi *y*. Dacă pentru un punct oarecare al suprafeței mediane deformate se definesc două *raze de curbură principale,* ρ_x şi ρ_y, atunci momentele încovoietoare se pot scrie funcție de aceste raze de curbură:

$$M_x = D \cdot \left(\frac{1}{\rho_y} + \nu \frac{1}{\rho_x} \right) = -D \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)$$
$$M_y = D \cdot \left(\frac{1}{\rho_x} + \nu \frac{1}{\rho_y} \right) = -D \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \qquad 6.3\text{-}1$$

Ecuația generală a încovoierii plăcilor plane a fost stabilită de către Sophie Germain şi ea are următoarea formă:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \qquad 6.3\text{-}2$$

Cu ajutorul operatorului nabla

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \qquad 6.3\text{-}3$$

ecuația Sophie Germain devine de forma:

$$\nabla^2 \left(\nabla^2 w \right) = \frac{p}{D} \qquad 6.3\text{-}4$$

Ecuația 6.3-4 este foarte asemănătoare cu ecuația deplasării grinzilor:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{p}{E\,I} \qquad 6.3\text{-}5$$

Deosebirea dintre cele două relații constă în aceea că rigiditatea *EI* de la grinzi, pentru plăci se înlocuieşte cu rigiditatea *D* iar derivarea în cazul plăcilor se face în raport cu ambele variabile independente, *x* şi *y*.

Condițiile pe contur rezultă dintr-o varietate de moduri de rezemare a plăcii dreptunghiulare: simplu rezemate, înțepenite, laturi nerezemate.

Astfel:

- *Pe o latură încastrată*, săgeata *w* şi rotirea sunt nule. Pentru placa dreptunghiulară din Fig.6.3-1, raportată la sistemul xOy se poate scrie:

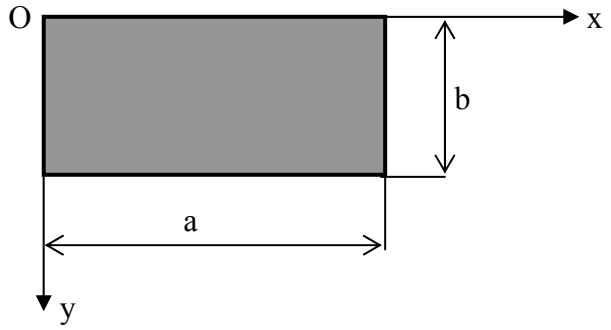


Fig.6.3-1

  - Pentru laturile paralele cu axa *Oy*, având *x = a* şi *x =a*, avem:

$$w = 0 \quad ; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad 6.3\text{-}6$$

  - Pentru laturile paralele cu axa *Ox*, având *y = 0 şi y = 0,* avem:

$$w = 0 \quad ; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \qquad 6.3\text{-}7$$

- *Pe o latură simplu rezemată*, săgeata şi momentul încovoietor sunt nule.
  - Pe laturile paralele cu axa *Oy*, unde *x = 0* şi *x = 0*, pe baza relațiilor 6.3-1, rezultă:

$$w = 0$$

$$M_y = -D \cdot \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \qquad 6.3\text{-}8$$

Deoarece în lungul unei laturi paralele cu axa *Oy*, săgeata *w = 0*, rezultă că şi

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

rămânând pentru latura simplu rezemată următoarele condiții:

$$w = 0$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \qquad 6.3\text{-}9$$

- În mod analog, pentru laturile paralele cu axa *Ox*, la *y = 0* şi *y = b*, rezultă următoarele condiții:

$$w = 0$$
$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \qquad 6.3\text{-}10$$

În continuare, calculul plăcilor dreptunghiulare urmează drumul prezentat la calculul plăcilor circulare.

În literatura de specialitate se găsesc relațiile necesare calculului plăcilor sub diferite încărcări şi moduri de rezemare.

6.4 CALCULUL LA ŞOC AL PLĂCILOR PLANE

Dacă pe o placă plană cade o greutate *Q* de la înălțimea *H*, atunci placa este solicitată dinamic, la şoc. Pentru calculul la şoc al plăcilor plane, se poate utiliza metoda prezentată în Capitolul 4 al acestei lucrări, metodă bazată pe cunoaşterea multiplicatorului de şoc.

Se consideră că o greutate *Q* cade de la înălțimea *H* pe mijlocul unei plăci circulare de rază *R* şi grosime *h* (Fig.6.4-1). Se pune problema determinării forței dinamice F_d care apare în momentul şocului în mijlocul plăcii.

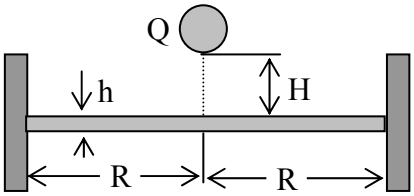


Fig.6.4-1

Multiplicatorul de şoc are expresia cunoscută:

$$\psi = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{st}}} \approx \sqrt{\frac{2H}{\delta_{st}}} \qquad 6.4\text{-}1$$

unde

δ_{st} – deplasarea statică a secțiunii de impact (săgeata statică a centrului plăcii sub acțiunea greutății *Q*).
De la calculul plăcii circulare înțepenită pe contur şi încărcată în centru cu o forță concentrată, se cunoaşte săgeata maximă din centrul plăcii (relația 6.2.5-3):

$$\delta_{st} = w_{max} = \frac{Q R^2}{16 \pi D} = \frac{Q R^2}{16 \pi \cdot \frac{E h^3}{12 \cdot (1 - \nu^2)}} \approx 0{,}217 \frac{Q R^2}{E h^3} \qquad 6.4\text{-}2$$

Expresia multiplicatorului de şoc, are acum forma:

$$\psi \approx \sqrt{\frac{2 H}{\frac{0{,}217 \cdot Q R^2}{E h^3}}} = \sqrt{\frac{9{,}2 \cdot H E h^3}{Q R^2}} \qquad 6.4\text{-}3$$

iar forța dinamică din momentul şocului este:

$$F_d = \psi \cdot Q = \frac{1}{R} \cdot \sqrt{9{,}2 \cdot Q H E h^3} \qquad 6.4\text{-}4$$

Analog, pot fi tratate şi celelalte tipuri de plăci solicitate prin şoc.

6.5 CALCULUL APROXIMATIV AL PLĂCILOR PLANE

Dacă nu se dispune de relațiile necesare calculului unei plăci, atunci se pot utiliza metode aproximative de calcul. Aceste metode aproximative, se bazează în special pe relațiile de calcul stabilite la barele drepte. Metoda aproximativă de calcul a plăcilor plane, este cunoscută sub numele de *metoda lui Bach.* Metoda propusă de Bach, utilizează relația lui Navier de la încovoierea barelor drepte:

$$\sigma_{max} = \frac{M_i}{W_z} \qquad 6.5\text{-}1$$

Metoda aproximativă de calcul se va prezenta pentru plăcile simetrice încărcate simetric. Această metodă este recomandată plăcilor simplu rezemate. Valoarea tensiunilor obținute prin metoda Bach, este una aproximativă şi mai mică decât tensiunea maximă calculată cu relațiile exacte. Din acest motiv, pentru un rezultat acoperitor, tensiunea admisibilă utilizată în calculul aproximativ, se micşorează cu 20 … 30 % față de cea obişnuită.

6.5.1 Calculul aproximativ al plăcii circulare simplu rezemată pe contur şi încărcată cu o sarcină uniform distribuită pe o suprafață circulară în jurul centrului plăcii

Fie o placă circulară de rază *R* şi grosime *h* simplu rezemată pe contur şi încărcată cu o sarcină uniform distribuită pe o suprafață circulară centrală de rază *r* (Fig.6.5.1-1a).

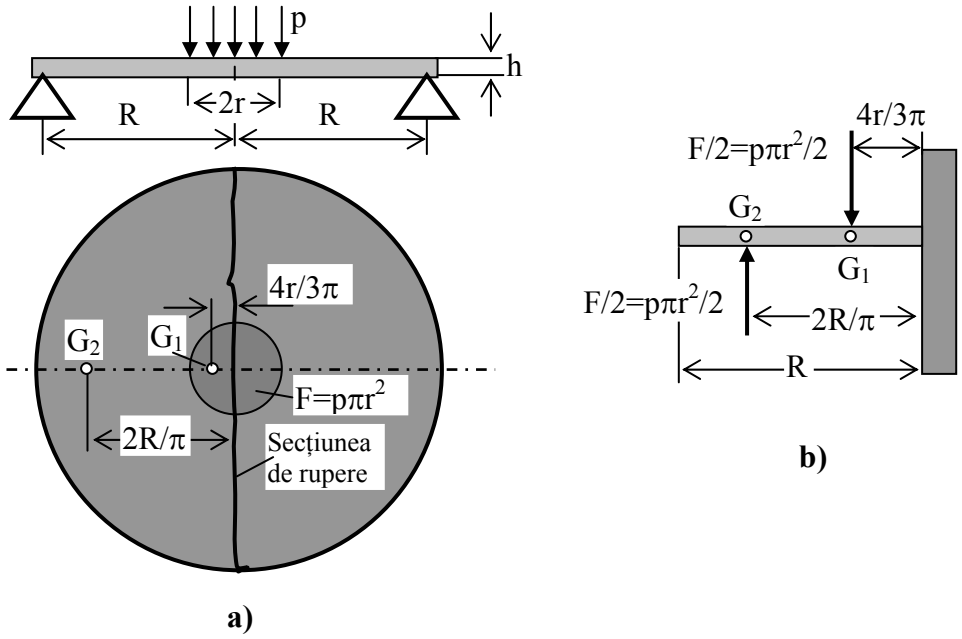


Fig.6.5.1-1

Cercetările experimentale au scos în evidență faptul că o astfel de placă se rupe totdeauna după un diametru. Atunci se poate considera pentru calcule o jumătate de placă încastrată în dreptul secțiunii de rupere (a unui diametru, Fig.6.5.1-1b). Forța distribuită totală $F = p\pi r^2$ se repartizează jumătății de placă în valoare de *F/2* şi se consideră redusă în centrul de greutate G_1 al suprafeței semicirculare de rază *r* situat la distanța $4R/3\pi$ de la încastrare. Reacțiunea sarcinii de pe jumătate de placă este tot *F/2* şi redusă acționează în centrul de greutate G_2 al conturului semicircular de rază *R*.

Momentul încovoietor în încastrare dat de cele două forțe (sarcina aplicată şi reacțiunea, Fig.6.5.1-1b) este:

$$M_i = \frac{F}{2}\cdot\frac{2R}{\pi} - \frac{F}{2}\cdot\frac{4r}{3\pi} = \frac{FR}{\pi}\cdot\left(1 - \frac{2}{3}\frac{r}{R}\right) \qquad 6.5.1\text{-}1$$

iar modulul de rezistență al secțiunii periculoase (diametrale) este:

$$W_z = \frac{2R \cdot h^2}{6} = \frac{R\,h^2}{3} \qquad 6.5.1\text{-}2$$

Pe baza relației 6.5-1, tensiunea normală maximă din placă este:

$$\sigma_{max} = \frac{M_i}{W_z} = \frac{3F}{\pi h^2} \cdot \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{r}{R}\right) = \frac{3pr^2}{h^2} \cdot \left(1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{r}{R}\right) \qquad 6.5.1\text{-}3$$

Dacă sarcina este distribuită acum pe toată suprafața plăcii ($r = R$), tensiunea maximă este:

$$\sigma_{max} = \frac{F}{\pi h^2} = \frac{pR^2}{h^2} \qquad 6.5.1\text{-}4$$

iar dacă forța F este concentrată toată în centrul plăcii ($r \to 0$) tensiunea maximă din placă este:

$$\sigma_{max} = \frac{3F}{\pi h^2} = 3 \cdot \frac{pR^2}{h^2} \qquad 6.5.1\text{-}5$$

Se poate uşor constata că atunci când sarcina este aplicată concentrat în centrul plăcii, tensiunea normală maximă din placă este de trei ori mai mare decât în cazul în care aceeaşi sarcină se aplică uniform pe toată suprafața plăcii. Concluzie asemănătoare a rezultat şi în urma calculului exact efectuat asupra plăcii circulare.

6.5.2 Calculul aproximativ al plăcii dreptunghiulare simplu rezemată pe contur

Fie o placă dreptunghiulară de grosime *h* simplu rezemată pe contur şi solicitată atât de o forță concentrată centrală *F* cât şi de sarcină uniform distribuită *p* pe toată suprafața sa (Fig.6.5.2-1a).

Cercetările experimentale au arătat că o astfel de placă se rupe totdeauna după o diagonală. Se poate atunci considera o jumătate de placă înțepenită de-a lungul secțiunii diagonale şi încărcată ca în Fig.6.5.2-1b. Forțele rezultante aplicate cât şi cele de legătură s-au redus în centrele de greutate ale suprafețelor asupra cărora ele acționează (Fig.6.5.2-1b). Diagonala împarte suprafața dreptunghiulară în două triunghiuri a căror înălțime este:

$$c = \frac{a \cdot b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad 6.5.2\text{-}1$$

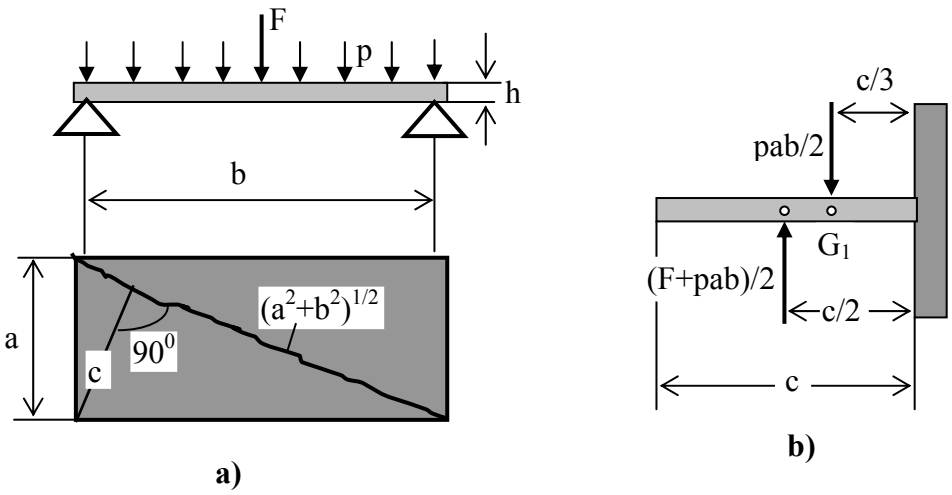


Fig.6.5.2-1

Forța uniform distribuită de pe o jumătate de placă se reduce la rezultanta ei, *pab/2* în centrul de greutate G_1 al triunghiului (a jumătății de dreptunghi). Rezultanta reacțiunii, *(F+pab)/2* de pe două laturi vecine se reduce în centrul de greutate G_2 al conturului de sprijin. Centrul G_2 este la distanța *c/2* de diagonală, iar centrul G_1 la distanța *c/3* de diagonală.

Momentul încovoietor din secțiunea periculoasă (secțiunea diagonală) este:

$$M_i = \frac{1}{2} \cdot (F + p\,a\,b) \cdot \frac{c}{2} - \frac{1}{2} \cdot p\,a\,b \cdot \frac{c}{3} = \frac{(3F + p\,a\,b) \cdot a\,b}{12 \cdot \sqrt{a^2 + b^2}} \qquad 6.5.2\text{-}2$$

iar modulul de rezistență al secțiunii este:

$$W_z = \frac{h^2}{6} \cdot \sqrt{a^2 + b^2} \qquad 6.5.2\text{-}3$$

Tensiunea normală maximă se determină cu relația lui Navier:

$$\sigma_{max} = \frac{M_i}{W_z} = \frac{(3F + p\,a\,b) \cdot a\,b}{2\,h^2 \cdot (a^2 + b^2)} \qquad 6.5.2\text{-}4$$

Pentru o placă patrată, când $a = b$, tensiunea maximă este:

$$\sigma_{max} = \frac{3F + p\,a^2}{4\,h^2} \qquad 6.5.2\text{-}5$$

Şi pentru această placă, pot fi studiate cazurile:

- Placa încărcată numai cu sarcină uniform distribuită
- Placa încărcată cu o forță concentrată în centrul plăcii, egală cu sarcina uniform distribuită pe toată suprafața plăcii.

7. VASE DE REVOLUȚIE CU PEREȚI SUBȚIRI

7.1 CONSIDERAȚII GENERALE

Vasele de revoluție (de rotație) fac parte din categoria plăcilor curbe cu grosime mică. Astfel de elemente sunt des întâlnite în practică: în construcții (cupole), în aviație, rezervoare etc. După cum este cunoscut, forma plăcii curbe este definită de suprafața sa mediană. De cele mai multe ori, grosimea acestor plăci este constantă.

Pentru vasele de revoluție, suprafețele mediane sunt suprafețe de rotație, generate de drepte sau curbe care se rotesc în jurul unei axe. Astfel, o dreaptă care se roteşte în jurul unei axe paralelă cu ea, generează un cilindru, o dreaptă care se roteşte şi întâlneşte axe generează, un con, o dreaptă care se roteşte în jurul unei axe şi nu o întâlneşte generează un hiperboloid de rotație, iar cupola sferică este generată de un arc de cerc.

Fie un vas de revoluție oarecare reprezentat numai prin suprafața mediană şi un punct *B* de pe suprafața sa (Fig.7.1-1).

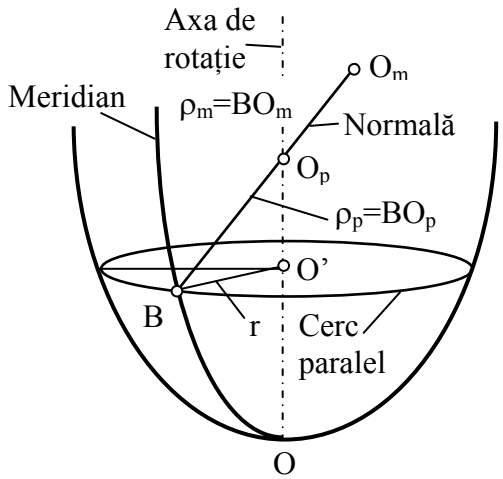


Fig.7.1-1

Prin rotirea punctului *B* în jurul axei *OO'* se obține un *cerc paralel*. *Meridianul* este o curbă care prin rotirea ei generează suprafața de rotație. Pe tangenta la planul normal al suprafeței mediane se găsesc *centrele de curbură principale*. Curbura suprafeței se caracterizează prin *razele principale de curbură* ρ_p şi ρ_m orientate perpendicular pe paralelă, respectiv meridian. Centrul de curbură O_p corespunzător paralelei este situat pe axa de rotație, iar cel al meridianului O_m poate fi situat oriunde pe normală. Razele de curbură ρ_p şi ρ_m determină forma şi dimensiunile vasului de revoluție.

7.2 CALCULUL VASELOR DE REVOLUȚIE CU PEREȚI SUBȚIRI

În Fig.7.2-1 se consideră un vas de revoluție cu perete subțire de grosime *h* supus la o presiune interioară *p*. Presiunea interioară poate fi creată fie de un lichid, fie de acțiunea unui agent gazos. În acest caz, starea de solicitare este simetrică în raport cu axa de rotație *OO'*.

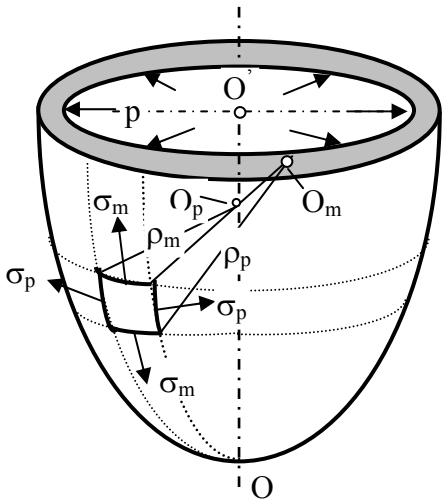


Fig.7.2-1

În cazul gazelor, presiunea acestuia este de obicei uniformă pe suprafața interioară, iar cea a lichidelor este proporțională cu adâncimea. La un plan paralel, presiunea se consideră constantă. Presiunea din interior supune vasul la diferite solicitări. Dacă peretele vasului este subțire, acesta prezintă o rezistență bună la întindere şi mai puțin la compresiune sau încovoiere. Ca urmare, pentru astfel de situații s-a dezvoltat *teoria de membrană* a vaselor de revoluție cu pereți subțiri, prin care se consideră că în peretele vasului apar tensiuni de întindere, uniform repartizate pe grosimea peretelui. În realitate, vasul nefiind chiar atât de subțire, prezintă şi o anumită rezistență la compresiune sau încovoiere.

Se izolează acum un element mic din peretele vasului, delimitat de două meridiane şi două paralele (Fig.2.7-2). Presiunea de pe acest element, se echilibrează cu tensiunile normale din peretele vasului. Datorită stării simetrice de solicitare în peretele vasului nu apar tensiuni tangențiale. Absența tensiunilor tangențiale, face ca direcțiile principale de solicitare să fie orientate de-a lungul meridianului şi paralelei, iar tensiunile σ_m şi σ_p orientate după aceste direcții, să fie tensiuni principale. De asemenea, tensiunea normală de pe suprafața vasului este mică şi se neglijează.

Pentru determinarea celor două tensiuni principale, se pune condiția de echilibru pentru elementul izolat din peretele vasului.

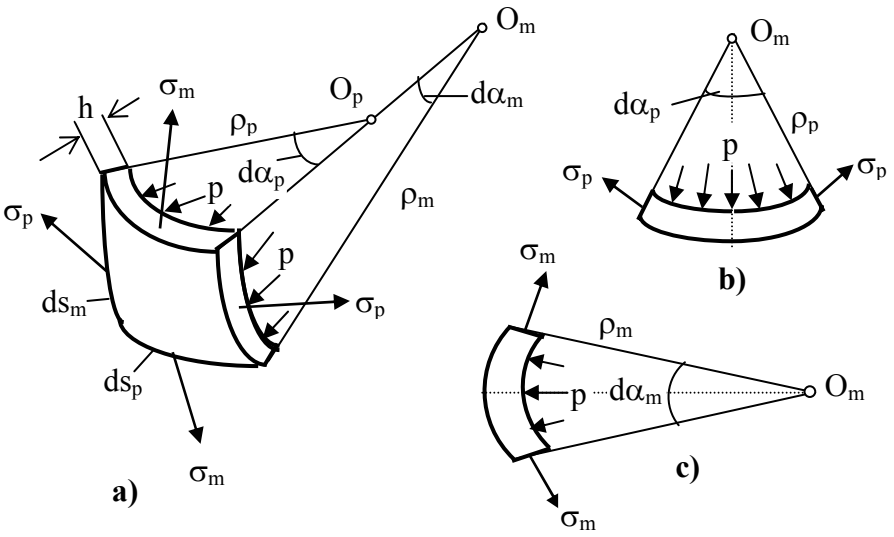


Fig.7.2-2

Această condiție se scrie ca o ecuație de proiecții de forțe pe direcția normalei la elementul considerat:

$$2\,\sigma_p\,h\,ds_m\,\sin\frac{d\alpha_p}{2} + 2\,\sigma_m\,h\,ds_p\,\sin\frac{d\alpha_m}{2} = p\,ds_m\,ds_p \qquad 7.2\text{-}1$$

Dacă se ține seama de faptul că:

$$ds_m = \rho_m\,d\alpha_m \quad ; \quad ds_p = \rho_p\,d\alpha_p \quad ; \quad \sin\frac{d\alpha}{2} \approx \frac{d\alpha}{2}$$

şi după efectuarea calculelor, relația 7.2-1 devine de forma:

$$\frac{\sigma_p}{\rho_p} + \frac{\sigma_m}{\rho_m} = \frac{p}{h} \qquad 7.2\text{-}2$$

Relația 7.2-2 care exprimă legătura dintre tensiunile principale, razele de curbură principale şi presiunea interioară este cunoscută sub denumirea de *ecuația lui Laplace.* După cum se poate constata, ecuația lui Laplace conține două necunoscute: tensiunile normale principale. Pentru a determina cele două tensiuni normale mai este necesară încă o relație. În acest scop, vasul se secționează de-a lungul unei paralele ce trece prin punctul în care se doreşte a se determina tensiunile normale (Fig.7.2-3). Asupra părții izolate acționează forța *Q*, dată de proiecția pe axa de simetrie a presiunilor interioare şi reacțiunea R_V, dacă vasul se sprijină, în punctul *O*. Echilibrul este îndeplinit de tensiunile σ_m care sunt repartizate uniform de-a lungul paralelei.

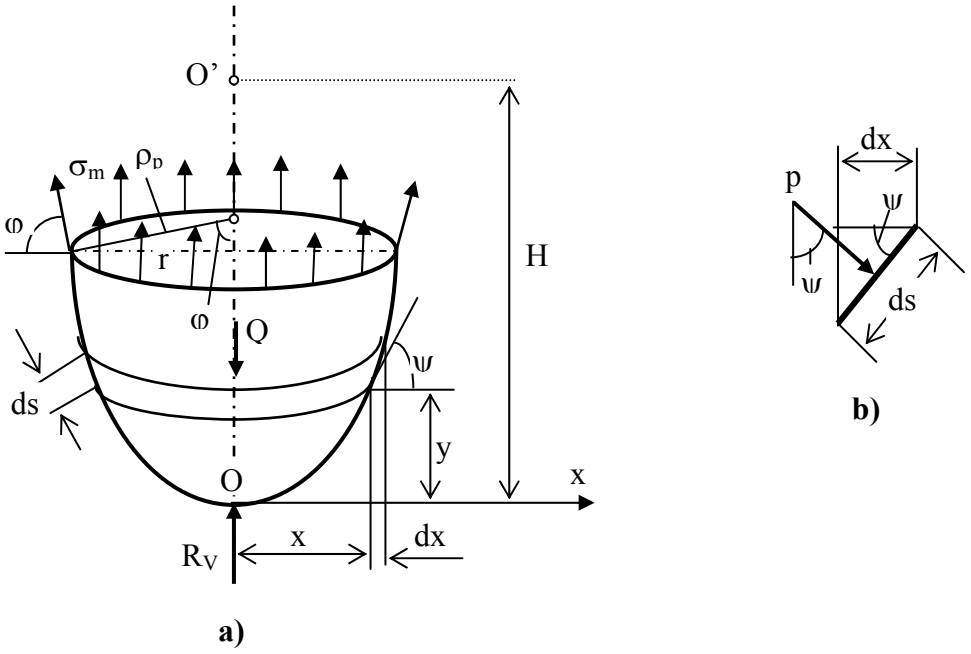


Fig.7.2-3

Punând condiția de echilibru:

$$\sigma_m \, 2\pi \, r \, h \sin\varphi = Q - R_V \qquad 7.2\text{-}3$$

se obține tensiunea normală principală:

$$\sigma_m = \frac{Q - R_V}{2\,\pi\, r\, h \sin\varphi} \qquad 7.2\text{-}4$$

unde

φ - unghiul format de raza de curbură ρ_p cu axa de rotație *OO'*.

Dacă se înlocuieşte relația 7.2-4 în ecuația lui Laplace (relația 7.2-2) se obține cealaltă tensiune normală principală:

$$\sigma_p = \frac{p\,\rho_p}{h} - \frac{Q - R_V}{2\,\pi\, h\, \rho_m \sin\varphi} \qquad 7.2\text{-}5$$

Prin procedeul prezentat, compresiunea şi încovoierea din zona de acțiune a reacțiunii R_V au fost neglijate. Dacă vasul este suspendat (nu este sprijinit), reacțiunea $R_V = 0$ (nu există).

Calculul tensiunilor normale principale, după cum rezultă din relațiile 7.2-4, respectiv 7.2-5, impune cunoaşterea sarcinii *Q*. Pentru determinarea acestei sarcini se izolează un element din vas, corespunzător unei paralele oarecare de rază *x* (Fig.7.2-3a). Elementul izolat are lungimea *ds* şi formează cu planul paralelei unghiul ψ. Presiunea *p* pe care o exercită lichidul din vas asupra elementului izolat (Fig.7.2-3b), dă o rezultantă normală elementară, a cărei proiecții pe axa de rotație este:

$$dQ = p\,2\pi x\,ds\cos\psi = 2\,\pi\,x\,p\,dx \qquad 7.2\text{-}6$$

unde s-a avut în vedere că

$$\cos\psi = dx$$

Dacă se însumează forțele elementare *dQ* pentru toate elementele inelare din care este alcătuită porțiunea detaşată a vasului, rezultă forța:

$$Q = 2\,\pi\int_0^r p\,x\,dx \qquad 7.2\text{-}7$$

Sarcina *Q* se determină pentru fiecare caz de vas în parte:

- *Vasul în poziție verticală umplut cu un lichid de înălțime H şi greutate specifică γ.*

Presiunea pe care o exercită lichidul asupra unui element situat la distanța *y* de punctul *O* (Fig.7.2-3a) este:

$$p = \gamma\cdot(H - y)$$

iar sarcina *Q* (relația 7.2-7):

$$Q = 2\,\pi\,\gamma\int_0^r (H - y)x\,dx = \pi\gamma r^2 H - 2\pi\gamma\cdot\int_0^r x\,y\,dx \qquad 7.2\text{-}8$$

În expresia 7.2-8, valoarea integralei este funcție de variabila *y*, care la rândul său depinde de forma vasului.

- *Vasul umplut cu un gaz (p = const.)*

Din relația 7.2-7, pentru acest caz, rezultă:

$$Q = \pi\,r^2\,p \qquad 7.2\text{-}9$$

Dacă reacțiunea $R_V = 0$, tensiunile principale au expresiile:

$$\sigma_m = \frac{p\rho_p}{2h}$$

$$\sigma_p = \frac{p\rho_p}{h} \cdot \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho_p}{\rho_m}\right) \qquad 7.2\text{-}10$$

Calculul de rezistență se efectuează pe baza teoriilor de rezistență, vasul aflându-se într-o stare plană de solicitare. Cum de cele mai multe ori, tensiunile principale sunt de acelaşi semn, se recomandă satisfacerea relației

$$\sigma_{max} \le \sigma_a$$

Acolo unde vasul prezintă o variație discontinuă a curburilor peretelui, de exemplu în dreptul colțurilor, relația lui Laplace conduce la rezultate eronate. Spre exemplu acolo unde $\rho_m \cong 0$, rezultă:

$$\frac{\sigma_p}{\rho_p} + \frac{\sigma_m}{0} = \frac{p}{h} \quad \Rightarrow \quad \sigma_p \to -\infty$$

Teoria de membrană prezentată are marele dezavantaj că nu poate exprima starea de tensiune din locurile cu discontinuități ale curburilor, acolo unde de obicei apar forțe tăietoare şi momente încovoietoare.

- *Vasul sferic cu perete subțire umplut cu un gaz* (Fig.7.2-4a)

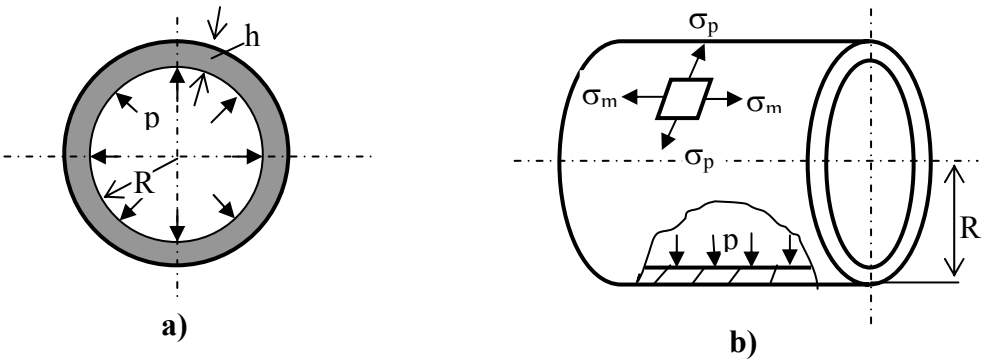


Fig.7.2-4

Pentru vasul sferic razele de curbură sunt egale:

$$\rho_m = \rho_p = R$$

şi din relațiile tensiunilor normale principale (relațiile7.2-10) rezultă că şi acestea sunt egale:

$$\sigma_p = \sigma_m = \frac{pR}{2h} \qquad 7.2\text{-}11$$

- *Vasul cilindric de grosime mică umplut cu un gaz* (Fig.7.2-4b)

În cazul vasului cilindric meridianul este o linie, rezultând că $\rho_m = \infty$. În această situație, pentru tensiunile normale principale rezultă următoarele relații:

$$\sigma_p = \frac{pR}{h}$$
$$\sigma_m = \frac{pR}{2h} \qquad 7.2\text{-}12$$

Se constată că tensiunea σ_p (circumferențială) este de două ori tensiunea normală σ_m (axială), ceea ce face ca un astfel de vas să se fisureze în lungul său, adică pe generatoare.

În comparație cu vasul sferic, se constată că tensiunea maximă din vasul cilindric este de două ori mai mare decât în cazul vasului sferic, ceea ce face ca vasul sferic să fie mai economic decât cel cilindric. Cu toate acestea, datorită modului de rezemare şi realizare practică, vasul sferic este mai puțin utilizat.

- *Vasul conic vertical, de unghi 2α, înălțime H, umplut cu un lichid de greutate specifică γ* (Fig.7.2-5)

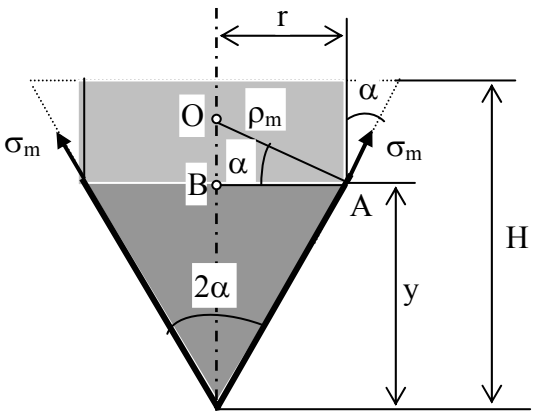


Fig.7.2-5

La înălțimea *y* de la fundul vasului se realizează o secțiune, iar raza de curbură circumferențială ρ_p este:

$$\rho_p = OA = \frac{AB}{\cos\alpha} = y\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\cos\alpha} \qquad 7.2\text{-}13$$

La nivelul secțiunii făcute, presiunea este egală cu greutatea coloanei de lichid de deasupra acesteia:

$$p = \gamma \cdot (H - y)$$

Având în vedere că $\rho_m = \infty$ şi înlocuind presiunea *p* şi ρ_m în relația 7.2-10 se determină tensiunea circumferențială

$$\frac{\sigma_p \cos\alpha}{y\,\mathrm{tg}\alpha} = \frac{\gamma \cdot (H - y)}{h} \Rightarrow \sigma_p = \frac{\gamma \cdot \mathrm{tg}\alpha}{h \cos\alpha} \cdot y \cdot (H - x) \qquad 7.2\text{-}14$$

În expresia lui σ_p intră factorii *y* şi *(H – y)* a căror sumă este o constantă, egală cu *H*. Valoarea maximă a lui σ_p se produce când aceşti factori sunt egali $y = H - y = H / 2$:

$$\sigma_{p\,max} = \frac{\gamma\,\mathrm{tg}\alpha}{h \cos\alpha} \cdot \frac{H^2}{4} \qquad 7.2\text{-}15$$

Pentru tensiunea principală σ_m se va ține seama atât de presiune cât şi de greutatea lichidului. Pentru aceasta se scrie relația de echilibru ca o sumă de forțe pe verticală:

$$\sigma_m\, 2\pi\, y\,\mathrm{tg}\alpha\, h \cos\alpha = \gamma\, \pi\, y^2\, \mathrm{tg}^2\alpha \cdot \left(\frac{y}{3} + H - y\right)$$

După efectuarea calculelor, se obține expresia:

$$\sigma_m = \frac{\gamma\,\mathrm{tg}\alpha}{2\,h \cos\alpha} \cdot y \cdot \left(H - \frac{2}{3} \cdot y\right) \qquad 7.2\text{-}16$$

Valoarea maximă a acestei tensiuni se determină anulând derivata de ordinul întâi:

$$\frac{d\sigma_m}{dy} = C\left[H - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}y\right] = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{4} \cdot H$$

$$\Rightarrow \sigma_{p\,max} = \frac{3\,\gamma\, H^2\, \mathrm{tg}\alpha}{16\, h \cos\alpha} \qquad 7.2\text{-}17$$

8. TUBURI CU PEREȚI GROŞI

8.1 CONSIDERAȚII GENERALE

Tuburile cu pereți groşi au o mare răspândire în practică. Astfel de elemente, solicitate la presiune interioară sau exterioară uniformă , sunt utilizate ca țevi, cilindri, cazane etc. Sub acțiunea presiunii, în tuburi se creează tensiuni care pot duce la distrugerea lor. Prezența câmpului de temperatură simetric față de axa tubului dar variabil pe direcția razei, produce în peretele acestuia tensiuni termice, care suprapuse peste cele create de presiune, pot conduce la valori mari ale tensiunilor şi implicit la scoaterea lor din funcționare. La calculul vaselor de revoluție cu pereți subțiri, s-a considerat că tensiunea este constantă pe grosimea peretelui vasului. Cu cât peretele vasului este mai gros, cu atât metoda prezentată la vasele cu pereți subțiri, conduce la erori mai mari. Calculul tuburilor cu pereți groşi consideră că tensiunile din peretele tubului nu mai sunt constante pe direcție radială. Starea de tensiune şi deformație într-un punct depinde numai de distanța de la axa tubului la punctul considerat. Punctele situate la aceeaşi rază r prezintă aceeaşi tensiune şi deformație. Starea de tensiune punctuală depinde atunci şi de variabila x, în lungul tubului. Dacă aceste mărimi nu variază cu x, atunci tensiunea în lungul cilindrului σ_x este constantă în toate punctele. În această situație rămân ca necunoscute celelalte tensiuni: σ_r (tensiunea radială) şi σ_t (tensiunea circumferențială). Se ajunge astfel la o stare plană de tensiune.

Calculul tuburilor cu pereți groşi se abordează cu teoria elasticității în coordonate polare, care din cauza simetriei geometrice şi a solicitării tubului, nu este greu de aplicat. În modul de abordare, se consideră că tubul are secțiune constantă şi este de lungime infinită. Calculul tuburilor cu pereți groşi se atribuie lui *G. Lamé.*

8.2 TUBUL CILINDRIC CU PERETE GROS SUPUS LA PRESIUNE INTERIOARĂ ŞI EXTERIOARĂ

Fie un tub cilindric închis la capete, cu pereți groşi de raze R_i şi R_e şi secțiune constantă, supus unei presiuni interioare p_i şi uneia exterioare p_e (Fig.8.2-1a). Se pune probleme determinării tensiunilor din peretele tubului astfel solicitat. Se consideră că materialul tubului satisface legea lui Hooke şi se neglijează efectul de încovoiere al capacelor de la capetele tubului.

În lungul tubului, presiunea interioară p_i produce o forță de întindere, iar presiunea p_e una de compresiune.

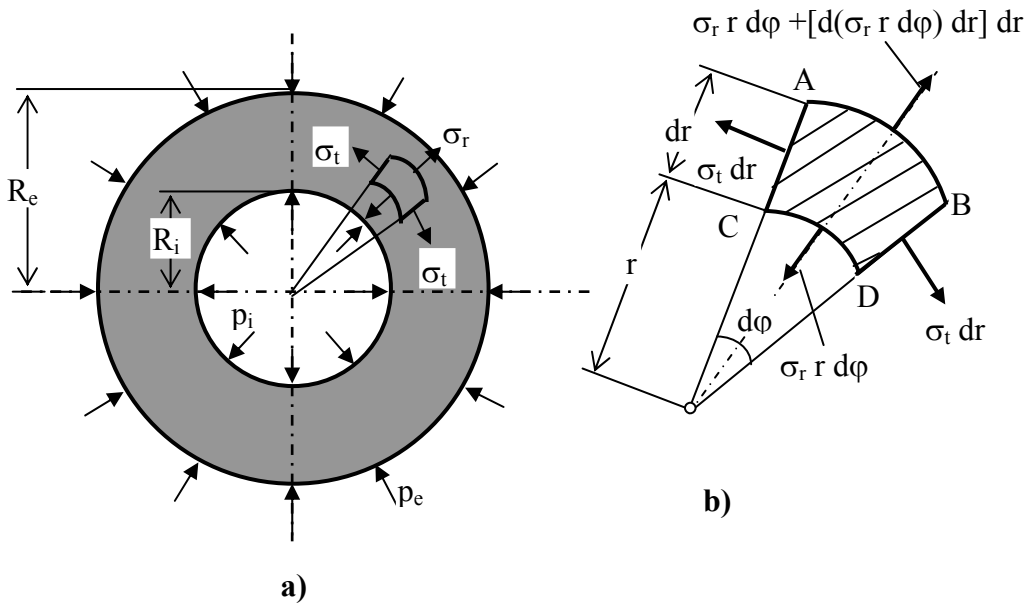


Fig.8.2-1

Cele două forțe, dau naştere în peretele tubului la o tensiune normală axială:

$$\sigma_x = \frac{p_i\,\pi R_i^2 - p_e\,\pi\left(R_e^2 - R_i^2\right)}{\pi\left(R_e^2 - R_i^2\right)} = \frac{R_i^2 \cdot \left(p_i + p_e\right) - R_e^2\,p_e}{R_e^2 - R_i^2} \qquad 8.2\text{-}1$$

care este repartizată uniform pe secțiunea transversală a tubului. Dacă tubul se consideră ca având lungime mare, atunci tensiunea normală axială (longitudinală) nu produce alungiri şi ea se poate neglija. Rămâne a se considera mai departe, tubul într-o stare plană de tensiune. Din cauza simetriei geometrice şi a încărcării, se consideră ca singura variabilă independentă pentru tensiuni şi deformații, dimensiunea radială *r* (raza).

Cu ajutorul a două plane care fac între ele unghiul $d\varphi$ se detaşează din peretele tubului un element de raze *r* şi *r*+*dr* (grosime *dr*) aşa cum este prezentat în Fig.8.2-2b. Pe fețele elementului nu există tensiuni tangențiale şi ca urmare tensiunile de pe cele patru fețe sunt tensiuni normale principale (radiale σ_r, respectiv circumferențiale σ_t). Din considerente de simetrie, pe fețele *AC* şi *BD* tensiunea σ_t este aceeaşi, iar tensiunea σ_r variază de la fața *CD* la fața *AB*.

Pentru elementul izolat de grosime unitară (pe desen sunt reprezentate direct forțele de pe fețele de grosime unitară) se pune condiția de echilibru, ca o sumă de forțe pe bisectoarea unghiului $d\varphi$:

$$\sigma_r \cdot r \cdot d\varphi + \frac{d}{dr}\left(\sigma_r\, r\, d\varphi\right) \cdot dr - \sigma_r \cdot r \cdot d\varphi - 2\sigma_t \cdot dr \cdot \sin\frac{d\varphi}{2} = 0$$

Aproximând

$$\sin\frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}$$

şi înlocuind în relația anterioară, după efectuarea calculelor, se obține:

$$\frac{d}{dr}\left(\sigma_r \cdot r\right) - \sigma_t = 0$$
$$\Rightarrow \; r \cdot \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_t = 0 \qquad 8.2\text{-}2$$

Ecuația 8.2.2 conține două necunoscute, tensiunile σ_r şi σ_t. Pentru a determina cele două tensiuni mai este necesară încă o relație. În acest scop, se va căuta o relație bazată pe deplasarea radială *u* a unui punct oarecare al tubului (Fig.8.2-2a).

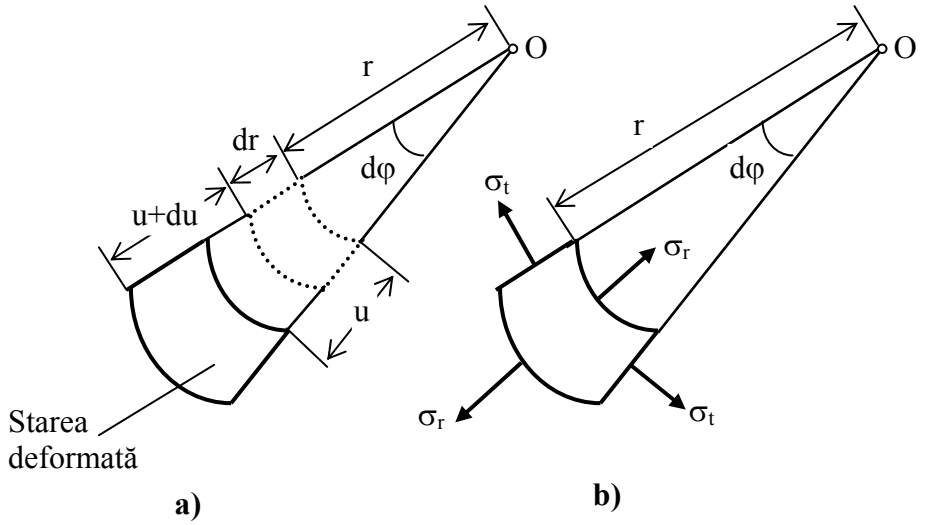


Fig.8.2-2

Un punct situat la distanța *r* de centru are *deplasarea radială u,* iar cel situat la distanța *u+ du* are deplasarea *u + (du/dr)·dr.* Lungirea segmentului *dr* este dată de diferența dintre cele două deplasări:

$$\Delta(dr) = u + \frac{du}{dr}dr - u = \frac{du}{dr} \cdot dr \qquad 8.2\text{-}3$$

iar lungirea specifică în direcție radială este:

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta(dr)dr}{} = \frac{du}{dr} \qquad 8.2\text{-}4$$

Ca urmare a deplasării *u,* raza *r* a unui cerc devine *r* + *u*, ceea ce face ca lungirea specifică circumferențială să devină:

$$\varepsilon_t = \frac{2\pi \cdot (r+u) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{u}{r} \qquad 8.2\text{-}5$$

Relațiile dintre tensiuni şi deformații specifice (legea lui Hooke generalizată) pentru acest caz se scriu sub forma:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\varepsilon_r + \nu\,\varepsilon_t)$$
$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot (\varepsilon_t + \nu\,\varepsilon_r)$$

sau ținând seama de relațiile 8.2-4 şi 8.2-5:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left(\frac{du}{dr} + \nu\frac{u}{r}\right)$$
$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left(\frac{u}{r} + \nu\frac{du}{dr}\right) \qquad 8.2\text{-}6$$

Relațiile 8.2-6 se introduc în ecuația diferențială 8.2-2, obținându-se expresia:

$$r \cdot \frac{d}{dr}\left[\frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left(\frac{du}{dr} + \nu\frac{u}{r}\right)\right] + \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left(\frac{du}{dr} + \nu\frac{u}{r}\right) - \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left(\frac{u}{r} + \nu\frac{du}{dr}\right) = 0$$

care după simplificări devine:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} - \frac{1}{r^2} \cdot u = 0 \qquad 8.2\text{-}7$$

Relația 8.2-7 este o ecuație diferențială de tip Euler, care admite o soluție de forma:

$$u = A \cdot r + \frac{B}{r} \qquad 8.2\text{-}8$$

Se calculează la început

$$\frac{u}{r} = A + \frac{B}{r^2}$$
$$\frac{du}{dr} = A - \frac{B}{r^2}$$

care introduse în expresiile tensiunilor (relațiile 8.2-6) conduc la:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu^2}\left[A\cdot(1+\nu) - \frac{B}{r^2}\cdot(1-\nu)\right] \qquad 8.2\text{-}9a$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu^2}\left[A\cdot(1+\nu) + \frac{B}{r^2}\cdot(1-\nu)\right] \qquad 8.2\text{-}9b$$

Constantele *A* şi *B* din relațiile 8.2-9 se determină din condițiile la limită, pe contur. Presiunile p_i şi p_e de la suprafețele tubului produc tensiuni radiale de compresiune:

$$\text{La } r = R_i \quad \Rightarrow \quad \sigma_r = -p_i$$
$$\text{La } r = R_e \quad \Rightarrow \quad \sigma_r = -p_e$$

Se înlocuiesc aceste condiții în ecuația 8.2-9a şi rezultă:

$$-p_i = \frac{E}{1-\nu^2}\left[A\cdot(1+\nu) - \frac{B}{r^2}\cdot(1-\nu)\right] \qquad 8.2\text{-}10a$$

$$-p_e = \frac{E}{1-\nu^2}\left[A\cdot(1+\nu) - \frac{B}{r^2}\cdot(1-\nu)\right] \qquad 8.2\text{-}10b$$

Rezolvând sistemul de ecuații 8.2-10, rezultă valoarea constantelor:

$$A = \frac{1-\nu}{E}\cdot\frac{R_i^2 p_i + R_e^2 p_e}{R_e^2 - R_i^2} \qquad 8.2\text{-}11a$$

$$B = \frac{1+\nu}{E}\cdot\frac{R_i^2 R_e^2 (p_i - p_e)}{R_e^2 - R_i^2} \qquad 8.2\text{-}11b$$

Cu aceste valori pentru constantele *A, B,* rezultă pentru tensiuni, expresiile:

$$\sigma_r = \frac{R_i^2 p_i - R_e^2 p_e}{R_e^2 - R_i^2} - \frac{(p_i - p_e)\cdot R_i^2 R_e^2}{R_e^2 - R_i^2}\cdot\frac{1}{r^2} \qquad 8.2\text{-}12a$$

$$\sigma_r = \frac{R_i^2 p_i - R_e^2 p_e}{R_e^2 - R_i^2} + \frac{(p_i - p_e)\cdot R_i^2 R_e^2}{R_e^2 - R_i^2}\cdot\frac{1}{r^2} \qquad 8.2\text{-}12b$$

Se poate constata că tensiunile normale (radiale şi circumferențiale) variază după o hiperbolă de gradul doi cu *r*, iar suma lor este o constantă.

Procedând asemănător, se obține expresia deplasării radiale a unui punct al tubului:

$$u = \frac{1-\nu}{E}\cdot\frac{R_i^2 p_i - R_e^2 p_e}{R_e^2 - R_i^2}\cdot r + \frac{1+\nu}{E}\cdot\frac{R_i^2 R_e^2\cdot(p_i - p_e)}{R_e^2 - R_i^2} \qquad 8.2\text{-}13$$

Se pot studia acum diferite cazuri particulare de solicitare ale tubului cu perete gros.

8.2.1 Tubul cilindric supus numai la presiune interioară

Dacă tubul este supus numai la presiune interioară ($p_e = 0$), relațiile pentru calculul tensiunilor normale (vezi relațiile 8.2-12) sunt:

$$\sigma_r = \frac{R_i^2 p_i}{R_e^2 - R_i^2}\cdot\left(1 - \frac{R_e^2}{r^2}\right) \qquad 8.2.1\text{-}1a$$

$$\sigma_t = \frac{R_i^2 p_i}{R_e^2 - R_i^2}\cdot\left(1 + \frac{R_e^2}{r^2}\right) \qquad 8.2.1\text{-}1b$$

Este de mare utilitate practică să se cunoască variația acestor tensiuni pe grosimea peretelui tubului.

- *Tensiunea normală radială* σ_r
  - La suprafața interioară, unde $r = R_i$:

    $\sigma_{ri} = -\,p_i$

  - La suprafața exterioară, unde $r = R_e$:

    $\sigma_{re} = 0$

- *Tensiunea normală circumferențială* σ_t
  - La suprafața interioară, unde $r = R_i$:

$$\sigma_{ti} = \sigma_{t\,max} = \frac{\left(R_i^2 + R_e^2\right)\cdot p_i}{R_e^2 - R_i^2}$$

  - La suprafața exterioară, unde $r = R_e$:

$$\sigma_{te} = \sigma_{t\,min} = \frac{2R_i^2\, p_i}{R_e^2 - R_i^2}$$

Variația tensiunilor normale pe grosimea peretelui tubului este prezentată în Fig.8.2.1-1.

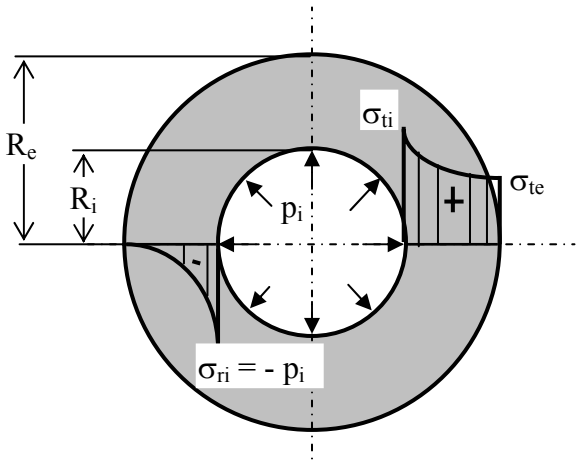


Fig.8.2.1-1

Cea mai mare valoare se obține pentru tensiunea circumferențială σ_t de la suprafața interioară a tubului. Calculul de rezistență al tubului cu perete gros, după teoria I de rezistență, impune satisfacerea condiției:

$$\sigma_{t\,max} = \frac{\left(R_i^2 + R_e^2\right)\cdot p_i}{R_e^2 - R_i^2} \le \sigma_a \qquad 8.2.1\text{-}2a$$

$$\Rightarrow \; R_e = R \cdot \sqrt{\frac{\sigma_a + p_i}{\sigma_a - p_i}} \qquad 8.2.1\text{-}2b$$

Relația 8.2.1-2b are soluție numai dacă $p_i < \sigma_a$.

Raportul dintre valorile extreme ale tensiunii normale circumferențiale este:

$$\frac{\sigma_{ti}}{\sigma_{te}} = \frac{R_i^2 + R_e^2}{2R_i^2} \qquad 8.2.1\text{-}3$$

şi el creşte o dată cu creşterea diferenței dintre pătratele razelor.
Dacă R_2 se apropie de R_1, grosimea tubului scade foarte mult. În acest caz, relațiile 8.2.1-1 arată că tensiunea radială devine nulă pe toată grosimea peretelui, iar relația 8.2.1-3 arată că raportul tensiunilor circumferențiale extreme devine egal cu unitatea, adică această tensiune este constantă. Această situație s-a întâlnit de fapt la vasele de revoluție cilindrice cu pereți subțiri.

Dacă se face un calcul de rezistență după teoria a III-a de rezistență, condiția care se impune este:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{t\,max} - \sigma_{ri}}{2} = \frac{R_e^2\, p_i}{R_e^2 - R_i^2} \le \sigma_a \qquad 8.2.1\text{-}4$$

Pentru deplasări, interesează în mod deosebit deplasarea unui punct de pe suprafața interioară. În acest caz, în relația 8.2-13 se ia $p_e = 0$ şi $r = R_i$. Se obține:

$$u_{r=R_i} = \left(\frac{R_i^2 + R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} + \nu\right) \cdot \frac{R_i\, p_i}{E} \qquad 8.2.1\text{-}5$$

8.2.2 Tubul cilindric supus numai la presiune exterioară

Pentru acest caz de tub, în expresiile tensiunilor normale (relațiile 8.2-12) se consideră $p_i = 0$ şi rezultă:

$$\sigma_r = -\frac{R_e^2\, p_e}{R_e^2 - R_i^2} \cdot \left(1 - \frac{R_i^2}{r^2}\right) \qquad 8.2.2\text{-}1$$

$$\sigma_t = -\frac{R_e^2\, p_e}{R_e^2 - R_i^2} \cdot \left(1 + \frac{R_e^2}{r^2}\right) \qquad 8.2.2\text{-}2$$

Se constată că ambele tensiuni sunt de compresiune, valori mai mari atingând tensiunea normală circumferențială.

- *Tensiunea normală radială* σ_r
  - La suprafața interioară, unde $r = R_i$:

$\sigma_{ri} = 0$

- La suprafața exterioară, unde $r = R_e$:

$\sigma_{re} = - p_e$

- *Tensiunea normală circumferențială* σ_t
  - La suprafața interioară, unde $r = R_i$:

$$\sigma_{ti} = \sigma_{t\,max} = -\frac{2\,R_e^2\,p_e}{R_e^2 - R_i^2}$$

  - La suprafața exterioară, unde $r = R_e$:

$$\sigma_{te} = \sigma_{t\,min} = -\frac{R_i^2 + R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \cdot p_e$$

Variația tensiunilor normale pentru tubul cilindric supus numai la presiune exterioară este prezentată în Fig.8.2.2-1.

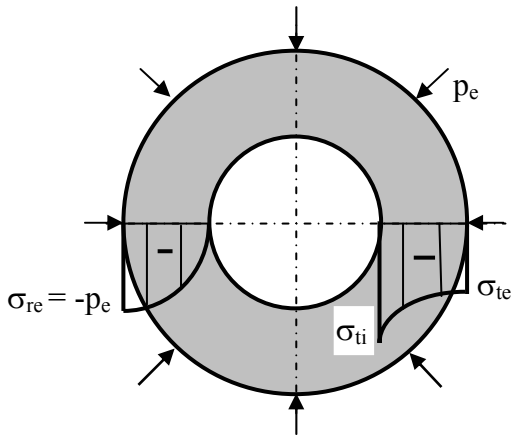


Fig.8.2.2-1

În ceea ce priveşte deplasările, pentru tubul cilindric supus numai la presiune exterioară, interesează deplasarea unui punct de pe suprafața exterioară. Pentru aceasta, în relația 8.2-13 se consideră $p_i = 0$ şi $r = R_e$:

$$u_{r=R_e} = -\left(\frac{R_i^2 + R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} - \nu\right) \cdot \frac{R_e\,p_e}{E} \qquad 8.2.2\text{-}3$$

8.3 TUBURI CILINDRICE FRETATE

La studiul tubului supus numai la presiune interioară s-a văzut că pentru dimensionarea tubului presiunea interioară nu poate depăşi tensiunea normală admisibilă. Asta însemnă că pentru tensiuni interioare mari, materialul din care este confecționat tubul trebuie să aibă tensiuni admisibile mari. O mărire a rezistenței tubului se poate realiza cu ajutorul *fretajului. Fretajul este procedeul de comprimare radială a unui tub solicitat la presiune interioară cu scopul micşorării tensiunii circumferențiale maxime*. În general, el se realizează prin introducerea unor tuburi cilindrice unul în celălalt, concentric şi cu strângere (Fig.8.3-1). Deoarece diametrul interior al tubului exterior este mai mic decât diametrul exterior al tubului interior, tubul exterior trebuie încălzit, iar cel interior eventual răcit.

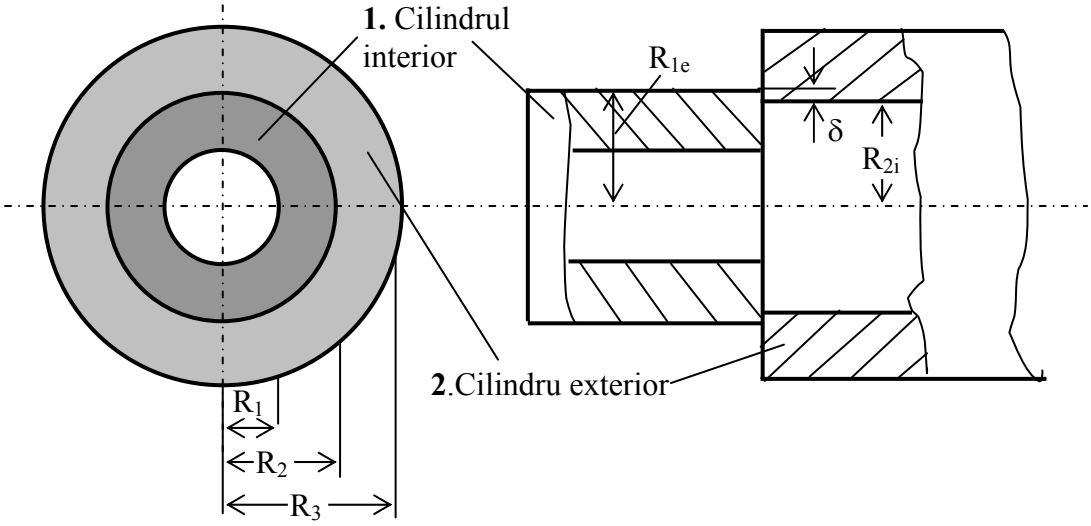


Fig.8.3-1

Fretajul poate fi realizat şi prin înfăşurarea prin strângere, pe suprafața exterioară a tubului, a unui cablu în spirală sau prin introducerea cu joc a tubului într-un cilindru în care se realizează o presiune hidraulică.

Fie un tub fretat, format din două tuburi cilindrice, introduse unul în celălalt cu strângere. Temperatura tuburilor este aceeaşi. Diferența dintre raza exterioară a tubului interior şi raza interioară a tubului exterior înainte de montare, se numeşte *seraj*:

$$\delta = R_{1e} - R_{2i} \qquad 8.3\text{-}1$$

După îmbinare, între cele două tuburi se realizează o *presiune de fretaj* p_f. Prin fretaj, raza exterioară a tubului interior s-a micşorat cu u_1, iar cea interioară a tubului exterior s-a mărit cu u_2. Se ajunge astfel la o rază R_2 comună de contact între tuburi:

$$R_2 = R_{1e} - u_1 = R_{2i} + u_2$$
$$\Rightarrow \ \delta = |u_1| + |u_2| \qquad 8.3\text{-}2$$

Se adună relațiile 8.2.1-5 şi 8.2.2-3 făcând $p_i = p_e = p$, iar în relația 8.2.1-5 se înlocuieşte R_1 *prin* R_2 şi R_2 prin R_3, rezultând:

$$\frac{p_f R_2}{E} \cdot \left(\frac{R_1^2 + R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} - \nu + \frac{R_1^2 + R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} + \nu \right) = \delta$$

de unde se obține valoarea presiunii de fretaj:

$$p_f = \frac{\left(R_2^2 - R_1^2\right) \cdot \left(R_3^2 - R_2^2\right) \cdot E\,\delta}{2\,R_2^3 \cdot \left(R_3^2 - R_1^2\right)} \qquad 8.3\text{-}3$$

Presiunea de fretaj, este o presiune exterioară pentru tubul interior şi interioară pentru tubul exterior. Cele două tuburi se pot studia separat, funcție de presiunea de fretaj la care sunt supuse fiecare.

- *Pentru tubul interior*, unde se utilizează relațiile 8.2.2-1, cu notația $p_e = p_f$
  - Pe suprafața exterioară unde $r = R_2$ se obține:

$$\sigma_r = -p_f$$
$$\sigma_t = -\frac{R_1^2 + R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot p_f \qquad 8.3\text{-}4$$

  - Pe suprafața interioară unde $r = R_1$

$$\sigma_r = 0$$
$$\sigma_t = \sigma_{t\,max} = -\frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \cdot 2p_f \qquad 8.3\text{-}5$$

- *Pentru tubul exterior*, unde se utilizează relațiile 8.2.1-1, cu notația $p_i = p_f$
  - Pe suprafața interioară unde $r = R_2$

$$\sigma_r = -p_f$$
$$\sigma_t = \sigma_{t\,max} = \frac{R_2^2 + R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} \cdot p_f \qquad 8.3\text{-}6$$

➢ Pe suprafața exterioară unde $r = R_3$

$$\sigma_r = 0$$
$$\sigma_t = \frac{R_2^2}{R_3^2 - R_1^2} \cdot 2p_f \qquad 8.3\text{-}7$$

După cum se poate constata, cele mai mari sunt tensiunile de pe fața interioară a tubului exterior, tensiuni care trebuie să fie luate în considerație la calculul de rezistență (dimensionare).

Studiul prezentat a luat în calcul numai presiunea de fretaj p_f dintre tuburi. În general, tubul interior este supus şi unei presiuni interioare p_i. La nivelul celor trei raze R_1, R_2, R_3 presiunea interioară p_i produce următoarele tensiuni:

- la suprafața interioară, unde $r = R_1$

$$\sigma_r = -p_i$$
$$\sigma_t = \frac{R_1^2 + R_3^2}{R_3^2 - R_1^2} \cdot p_i \qquad 8.3\text{-}8$$

- la suprafața de separație, unde $r = R_2$

$$\sigma_r = -\frac{R_1^2 \cdot \left(R_3^2 - R_2^2\right)}{R_2^2 \cdot \left(R_3^2 - R_1^2\right)} \cdot p_i \qquad 8.3\text{-}9a$$

$$\sigma_t = \frac{R_1^2 \cdot \left(R_2^2 + R_3^2\right)}{R_2^2 \cdot \left(R_3^2 - R_1^2\right)} \cdot p_i \qquad 8.3\text{-}9b$$

- la suprafața exterioară, unde $r = R_3$

$$\sigma_r = 0$$
$$\sigma_t = \frac{R_1^2}{R_3^2 - R_1^2} \cdot 2p_i \qquad 8.3\text{-}10$$

Dacă se adună la nivelul razelor R_1, R_2, R_3 tensiunile datorate presiunii de fretaj p_f şi a celei interioare p_i, se obțin tensiunile rezultante din cele două tuburi. În Fig.8.3-2 se prezintă diagramele tensiunilor produse de presiunea de fretaj p_f (Fig.8.3-2a), de presiunea interioară p_i (Fig.8.3-2b) şi cea rezultantă (Fig.8.3-2c).

Pentru tensiunea normală radială σ_r fretajul nu are efect favorabil, tensiunile maxime rămânând aceleaşi. În schimb, asupra tensiunii normale

circumferențiale σ_t, fretajul are un mare efect, micşorând valoarea maximă a acestei tensiuni, ceea ce permite creşterea presiunii interioare din tub.

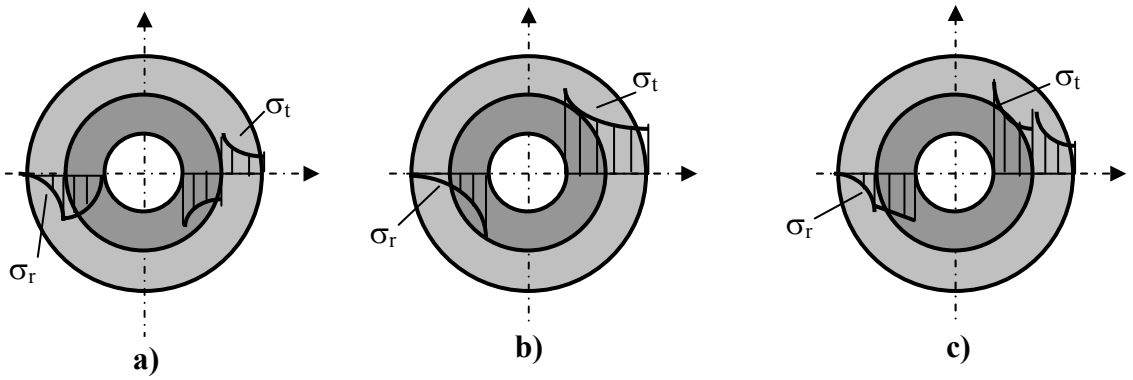


Fig.8.3-2

Vârfurile valorilor pentru tensiunile rezultante prezentate în Fig.8.3-2 se pot obține relativ uşor, motiv pentru care nu au mai fost trecute în diagramă. Ele de altfel au fost calculate separat în cadrul acestui capitol.
Pentru un calcul de rezistență după teoria a III-a de rezistență, rezultă că tensiunea tangențială maximă de pe suprafața interioară a cilindrului exterior (acolo unde tensiunea este maximă), este:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_t - \sigma_r}{2} = \left(\frac{R_2^2 + R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} + 1\right) \cdot \frac{p_f}{2} = \frac{R_3^2}{R_3^2 - R_2^2} \cdot p_f \qquad 8.3\text{-}11$$

sau după înlocuirea presiunii de fretaj p_f:

$$\tau_{max} = \frac{\delta E R_3^2 \cdot \left(R_2^2 - R_1^2\right)}{2 R_2^3 \cdot \left(R_3^2 - R_1^2\right)} \qquad 8.3\text{-}12$$

Pentru un inel fretat pe un arbore plin ($R_1 = 0$), tensiunea tangențială maximă are expresia:

$$\tau_{max} = \frac{\delta E}{2 R_2} \qquad 8.3\text{-}13$$

Pe baza celor prezentate, se pot studia acum o serie de montaje fretate între diferite organe de maşini.

8.4 TENSIUNI TERMICE ÎN TUBUL CU PERETE GROS

În practică, mai ales în centralele termoelectrice există tuburi (conductele de abur) cu perete gros, care sunt supuse, pe lângă presiunea interioară, la un câmp termic axial simetric cu temperatură constantă în lungul tubului, dar variabilă pe grosimea peretelui. Datorită temperaturii neuniforme, în peretele tubului apar tensiuni, care se suprapun peste cele create de presiunea interioară. Pentru astfel de elemente, se poate considera că secțiunile transversale aflate la distanțe mari de capetele tubului rămân plane, iar lungirea specifică în lungul tubului ε_x este constantă.

Relațiile care exprimă tensiunile se deduc asemănător ca în cazul tuburilor solicitate de către presiunea interioară sau exterioară. Lungirile specifice (radiale, respectiv circumferențiale) se exprimă atunci prin relațiile cunoscute:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \qquad \varepsilon_t = \frac{u}{r} \qquad 8.4\text{-}1$$

iar ecuația de echilibru este:

$$\frac{d}{dr}\left(r\,\sigma_r\right) = \sigma_t \qquad 8.4\text{-}2$$

dacă se ia în considerare şi tensiunea produsă de variația temperaturii, legea lui Hooke se completează cu termenul corespunzător acestei tensiuni.

Dacă se notează cu θ creşterea de temperatură față de starea inițială într-un element situat la distanța *r*, cu α coeficientul de dilatare termică liniară a materialului, cu σ_x tensiunea normală axială, expresiile lungirilor specifice principale sunt:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\left[\sigma_r - \nu\left(\sigma_x + \sigma_t\right)\right] + \alpha\,\theta \qquad 8.4\text{-}3a$$

$$\varepsilon_t = \frac{1}{E}\left[\sigma_t - \nu\left(\sigma_x + \sigma_r\right)\right] + \alpha\,\theta \qquad 8.4\text{-}3b$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_r + \sigma_t\right)\right] + \alpha\,\theta = \text{const.} \qquad 8.4\text{-}3c$$

Din relațiile 8.4-3 se obțin expresiile tensiunilor normale principale funcție de lungirile specifice principale:

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)\cdot(1-2\nu)}\cdot\left[(1-\nu)\varepsilon_r + \nu\,\varepsilon_t + \nu\,\varepsilon_x - (1+\nu)\cdot\alpha\,\theta\right] \qquad 8.4\text{-}4a$$

$$\sigma_t = \frac{E}{(1+\nu)\cdot(1-2\nu)}\cdot\left[(1-\nu)\varepsilon_t + \nu\,\varepsilon_x + \nu\,\varepsilon_r - (1+\nu)\cdot\alpha\,\theta\right] \qquad 8.4\text{-}4b$$

$$\sigma_x = \frac{E}{(1+\nu)\cdot(1-2\nu)}\cdot\left[(1-\nu)\varepsilon_x + \nu\,\varepsilon_r + \nu\,\varepsilon_t - (1+\nu)\cdot\alpha\,\theta\right] \qquad 8.4\text{-}4c$$

În cele ce urmează, se va admite ipoteza că modulul de elasticitate *E* al materialului tubului nu variază cu temperatura.

Ecuația diferențială de echilibru (forma ei este cunoscută de la tuburile cu pereți groşi) pentru situația când se ia în considerare şi temperatura este de forma:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{du}{dr} - \frac{u}{r} = \frac{1+\nu}{1-\nu}\cdot\alpha\cdot\frac{d\theta}{dr} \qquad 8.4\text{-}5$$

care poate fi scrisă sub formă integrabilă:

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(u\,r)\right] = \frac{1+\nu}{1-\nu}\cdot\alpha\cdot\frac{d\theta}{dr} \qquad 8.4\text{-}6$$

Integrând acum ecuația 8.4-6 se obține expresia deplasării radiale *u:*

$$u = \frac{1+\nu}{1-\nu}\cdot\frac{1}{r}\cdot\int_{R_i}^{r}\alpha\,\theta\,r\,dr + A\,r + \frac{B}{r} \qquad 8.4\text{-}7$$

unde

A, B – constante de integrare.

Constantele de integrare se determină din condițiile la limită. Astfel pentru

$$r = R_i \;\; \text{şi} \;\; r = R_e \;\; \Rightarrow \;\; \sigma_r = 0 \qquad 8.4\text{-}8$$

Înlocuind relația 8.4-7 în 8.4-4a, expresia tensiunii radiale în funcție şi de constantele de integrare *A* şi *B*, este de forma:

$$\sigma_r = \frac{E}{1+\nu}\cdot\left[-\frac{1+\nu}{1-\nu}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\int_{R_i}^{r}\alpha\,\theta\,r\,dr + \frac{A}{1-2\nu} - \frac{B}{r^2} + \frac{\nu}{1-2\nu}\cdot\varepsilon_x\right] \qquad 8.4\text{-}9$$

Punând condițiile 8.4-8 în relația 8.4-9 şi făcând calculele, se obțin cele două constante de integrare:

$$A = \frac{1+\nu}{1-\nu}\cdot\frac{1-2\nu}{R_e^2 - R_i^2}\cdot\int_{R_i}^{R_e}\alpha\,\theta\,r\,dr - \nu\cdot\varepsilon_x \qquad 8.4\text{-}10a$$

$$B = \frac{1+\nu}{1-\nu}\cdot\frac{R_i^2}{R_e^2 - R_i^2}\cdot\int_{R_i}^{R_e}\alpha\,\theta\,r\,dr \qquad 8.4\text{-}10b$$

Aceste valori ale constantelor de integrare se introduc în relația 8.4-7, apoi se calculează relațiile 8.4-1, după care acestea se introduc în relațiile 8.4-4 de unde se obțin expresiile tensiunilor normale principale:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\left[\frac{r^2 - R_i^2}{R_e^2 - R_i^2}\cdot\int_{R_i}^{R_e}\alpha\,\theta\,r\,dr - \int_{R_i}^{r}\alpha\,\theta\,r\,dr\right] \qquad 8.4\text{-}11a$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu}\cdot\frac{1}{r^2}\cdot\left[\frac{r^2 + R_i^2}{R_e^2 - R_i^2}\cdot\int_{R_i}^{R_e}\alpha\,\theta\,r\,dr + \int_{R_i}^{r}\alpha\,\theta\,r\,dr - \alpha\,\theta\,r^2\right] \qquad 8.4\text{-}11b$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu}\cdot\left[\frac{2\nu}{R_e^2 - R_i^2}\cdot\int_{R_i}^{R_e}\alpha\,\theta\,r\,dr + (1-\nu)\cdot\varepsilon_x - \alpha\,\theta\right] \qquad 8.4\text{-}11c$$

După cum se observă, în expresia tensiunii normale axiale σ_x apare deformația specifică ε_x, care este necunoscută. Pentru determinarea acesteia, dilatarea longitudinală a tubului fiind liberă, se consideră că efortul axial din secțiunea transversală este nul:

$$N = \int_0^{2\pi}\int_{R_i}^{R_e}\sigma_x\,r\,d\varphi\,dr = 0 \;\Rightarrow\; \int_{R_i}^{R_e}\sigma_x\,r\,dr = 0 \qquad 8.4\text{-}12$$

Ținând seamă de relația 8.4-12, din 8.4-11c rezultă expresia lungirii specifice

$$\varepsilon_x = \frac{2}{R_e^2 - R_i^2}\cdot\int_{R_i}^{R_e}\alpha\,\theta\,dr \qquad 8.4\text{-}13$$

care conduce la tensiunea normală axială:

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu} \cdot \left(\frac{2}{R_e^2 - R_i^2} \cdot \int_{R_i}^{R_e} \alpha\,\theta\,r\,dr - \alpha\,\theta \right) \qquad 8.4\text{-}14$$

După cum se constată, pentru calculul tensiunilor normale principale şi a deplasării radiale trebuie cunoscută legea de distribuție a temperaturii *θ(r)* pe grosimea peretelui tubului. Se cunosc mai multe legi de distribuție a temperaturii pe grosimea peretelui. Cea mai simplă este *distribuția liniară*:

$$\theta(r) = \frac{R_e - r}{R_e - R_i} \cdot \Delta\theta \qquad 8.4\text{-}15$$

unde

$$\Delta\theta = \theta_i - \theta_e$$

şi reprezintă diferența dintre temperatura la suprafața interioară şi cea exterioară a tubului.

Acceptând această distribuție a temperaturii şi după efectuarea integrărilor din relațiile 8.4-11a,b şi 8.4-14, tensiunile normale principale capătă forma finală:

$$\sigma_r = \frac{E\alpha \cdot \Delta\theta}{3 \cdot (1-\nu) \cdot (R_e - R_i)} \cdot \left[r - \frac{R_e^3 - R_i^3}{R_e^2 - R_i^2} + \frac{R_i^2 R_e^2}{R_i + R_e} \cdot \frac{1}{r^2} \right] \qquad 8.4\text{-}16a$$

$$\sigma_t = \frac{E\alpha \cdot \Delta\theta}{3 \cdot (1-\nu) \cdot (R_e - R_i)} \cdot \left[2r - \frac{R_e^3 - R_i^3}{R_e^2 - R_i^2} + \frac{R_i^2 R_e^2}{R_i + R_e} \cdot \frac{1}{r^2} \right] \qquad 8.4.16b$$

$$\sigma_x = \frac{E\alpha \cdot \Delta\theta}{3 \cdot (1-\nu) \cdot (R_e - R_i)} \cdot \left[3r - 2 \cdot \frac{R_e^3 - R_i^3}{R_e^2 - R_i^2} \right] \qquad 8.4\text{-}16c$$

Pe cele două suprafețe ale tubului rezultă tensiunile:

- pe suprafața interioară, unde $r = R_i$:

$$\sigma_r = 0$$

$$\sigma_t = \frac{E\alpha \cdot \Delta\theta}{3 \cdot (1-\nu)} \cdot \frac{R_i^2 + R_i R_e - 2R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \qquad 8.4\text{-}17$$

- pe suprafața exterioară, unde $r = R_e$:

$$\sigma_r = 0$$

$$\sigma_t = \frac{E\alpha \cdot \Delta\theta}{3 \cdot (1-\nu)} \cdot \frac{R_e^2 + R_i R_e - 2R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} \qquad 8.4\text{-}18$$

Dacă se anulează derivata tensiunii normale radiale σ_r, se obține distanța *r* la care tensiunea normală radială are valoare maximă:

$$r = \sqrt[3]{\frac{2R_i^2 R_e^2}{R_i + R_e}} \qquad 8.4\text{-}19$$

În Fig.8.4-1 se prezintă variația tensiunilor normale radiale, respectiv circumferențiale, pentru situația în care $R_e = 2\ R_i$, $\nu = 0,3$ şi $\theta_i > \theta_e$ (adică $\Delta\theta > 0$).

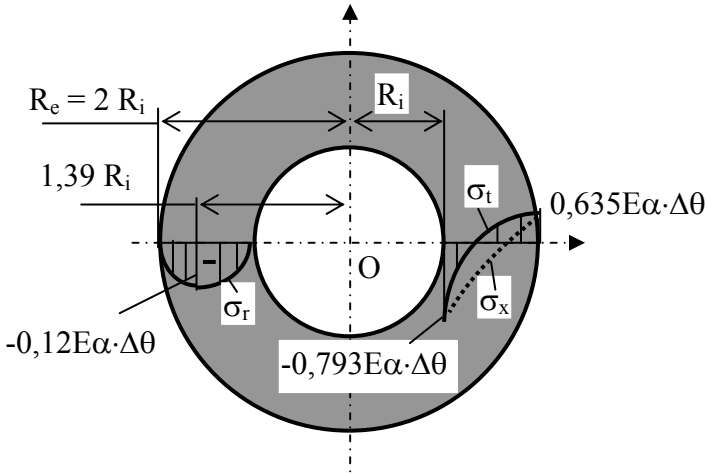


Fig.8.4-1

În acest caz, tensiunea normală circumferențială maximă este de compresiune şi apare tot pe suprafața interioară a tubului.

Aplicație

O conductă de abur viu dintr-o centrală termoelectrică cu R_i = 120 mm, R_e = 160 mm, în timpul funcționării normale are la interior temperatura θ_i = 540^0 C şi la exterior θ_e = 400^0 C. Considerând E = $2 \cdot 10^5$ MPa, ν = 0, 3, α =$12 \cdot 10^{-6}$ şi acceptând o distribuție liniară a temperaturii pe grosimea peretelui conductei, să se calculeze tensiunile termice circumferențiale extreme.

Rezolvare

Diferența de temperatură pe grosimea peretelui conductei este:

$$\Delta\theta = 540 - 400 = 140^0\ C$$

La suprafața interioară, tensiunea normală circumferențială este:

$$\sigma_{ti} = \frac{E\alpha \cdot \Delta\theta}{3\cdot(1-\nu)} \cdot \frac{R_i^2 + R_i R_e - 2R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} =$$

$$= \frac{2\cdot 10^5 \cdot 12\cdot 10^{-6}\cdot 140}{3\cdot(1-0{,}3)} \cdot \frac{120^2 + 120\cdot 160 - 2\cdot 160^2}{160^2 - 120^2} = -240 \text{ MPa}$$

iar *la suprafața exterioară*:

$$\sigma_{te} = \frac{E\alpha \cdot \Delta\theta}{3\cdot(1-\nu)} \cdot \frac{R_e^2 + R_i R_e - 2R_i^2}{R_e^2 - R_i^2} =$$

$$= \frac{2\cdot 10^5 \cdot 12\cdot 10^{-6}\cdot 140}{3\cdot(1-0{,}3)} \cdot \frac{160^2 + 120\cdot 160 - 2\cdot 120^2}{160^2 - 120^2} = 228{,}57 \text{ MPa}$$

Tensiunile produse ca urmare a variației temperaturii în peretele conductei au valori relativ mari. Suprapuse peste cele produse de presiunea interioară a aburului, pot conduce la avarierea conductei, lucru deosebit de periculos într-o centrală termoelectrică.

Se poate constata uşor, că o izolare exterioară bună a conductei conduce la micşorarea diferenței de temperatură între suprafața interioară şi cea exterioară, cu efect asupra micşorării tensiunilor termice din conductă. Ca urmare, izolarea exterioară a conductelor de abur nu este un moft ci o necesitate obiectivă şi trebuie să i se acorde mare importanță. Nici o zonă a suprafeței exterioare de la conductele de abur din centralele termoelectrice, nu trebuie să fie neizolată.

8.5 VASE SFERICE CU PEREȚI GROŞI

Fie un vas sferic cu perete gros cu raza interioară R_i şi cea exterioară R_e, realizat dintr-un material omogen şi izotrop şi care se supune legii lui Hooke (Fig.8.5-1a). Vasul este solicitat atât de o presiune interioară p_i cât şi de una exterioară p_e. Într-un astfel de vas nu există tensiune normală σ_x.

Din vasul sferic se izolează un element, pe fețele căruia acționează tensiunile normale radiale σ_r şi cele circumferențiale σ_t (Fig.8.5-1b). Deoarece vasul este simetric după toate direcțiile, tensiunile normale care apar sunt tensiuni principale, iar elementul se deplasează, păstrându-şi forma sferică şi după deformare.

Deplasării radiale u îi corespunde o lungire specifică radială ε_r şi una circumferențială ε_t:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad \text{şi} \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r} \qquad 8.5\text{-}1$$

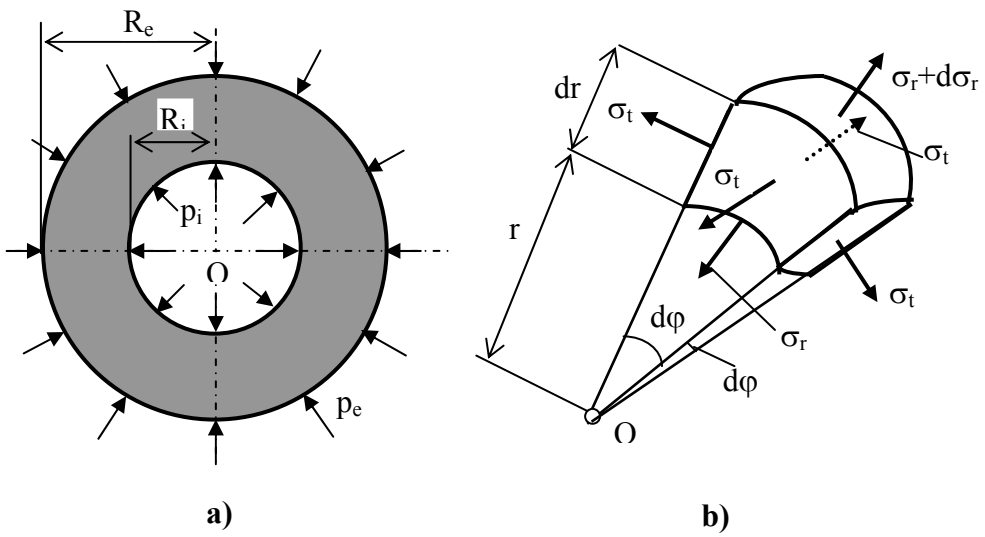


Fig.8.5-1

Se pune condiția de echilibru pentru elementul izolat, ca o sumă de proiecții de forțe pe bisectoarea unghiului $d\varphi$ (Fig.8.5-1b):

$$(\sigma_r + d\sigma_r)\cdot(r + dr)^2 \cdot d\varphi^2 - \sigma_r r^2 \cdot d\varphi^2 - 4\sigma_t\, dr\, r\, d\varphi \sin\frac{d\varphi}{2} = 0 \qquad 8.5\text{-}2$$

După efectuarea calculelor şi neglijarea infiniților mici de ordin superior, se obține ecuația diferențială:

$$r\frac{d\sigma_r}{dr} + 2\cdot(\sigma_r - \sigma_t) = 0 \qquad 8.5\text{-}3$$

Aplicând legea lui Hooke generalizată, deformațiile specifice principale sunt:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E}\cdot(\sigma_r - 2\nu\sigma_t) \\ \varepsilon_t &= \frac{1}{E}\cdot[(1-\nu)\sigma_t - \nu\sigma_r] \end{aligned} \qquad 8.5\text{-}4$$

cu ajutorul cărora, tensiunile normale principale au expresiile:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu-2\nu^2}\cdot[2\nu\varepsilon_t + (1-\nu)\cdot\varepsilon_r] = \frac{E}{1-\nu-2\nu^2}\cdot\left[2\nu\frac{u}{r} + (1-\nu)\cdot\frac{du}{dr}\right] \qquad 8.5\text{-}5a$$

$$\sigma_t = \frac{E}{1-\nu-2\nu^2}\cdot\left(\varepsilon_t + \nu\,\varepsilon_r\right) = \frac{E}{1-\nu-2\nu^2}\cdot\left(\frac{u}{r} + \nu\frac{du}{dr}\right) \qquad 8.5\text{-}5b$$

Înlocuind relațiile 8.5-5 în 8.5-2, se obține ecuația diferențială a deplasării radiale:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r}\cdot\frac{du}{dr} - 2\cdot\frac{u}{r^2} = 0 \qquad 8.5\text{-}6$$

care poate fi restrânsă la forma integrabilă:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{du}{dr} + 2\cdot\frac{u}{r}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r^2}\cdot\left(r^2\cdot\frac{du}{dr} + 2\,u\,r\right)\right] = 0$$

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r^2}\cdot\frac{d}{dr}\left(u\,r^2\right)\right] = 0 \qquad 8.5\text{-}7$$

Integrând ecuația 8.5-7, rezultă:

$$\frac{1}{r^2}\cdot\frac{d}{dr}\left(u\,r^2\right) = 3\,A = \text{const.}$$

de unde se obține:

$$u = A\,r + \frac{B}{r^2} \qquad 8.5\text{-}8$$

unde

A, B – constante de integrare, care se determină punând condițiile la limită.

În funcție de constantele de integrare, tensiunile normale principale au acum expresiile:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu-2\nu^2}\cdot\left[A\cdot(1+\nu) - \frac{2\,B}{r^3}\cdot(1-2\,\nu)\right] \qquad 8.5\text{-}9a$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\nu-2\nu^2}\cdot\left[A\cdot(1+\nu) + \frac{2\,B}{r^3}\cdot(1-2\,\nu)\right] \qquad 8.5\text{-}9b$$

Condițiile la limită pentru determinarea constantelor de integrare care se pun, sunt:

Pentru $r = R_i \quad \Rightarrow \quad \sigma_r = -p_i$

Pentru $r = R_e \quad \Rightarrow \quad \sigma_r = -p_e$

Cu aceste înlocuiri pentru tensiunea normală radială, rezultă:

$$\sigma_{r=R_i} = \frac{E}{1-\nu-2\nu^2}\cdot\left[A\cdot(1+\nu)-\frac{2B}{r^3}\cdot(1-2\nu)\right] = -p_i$$

$$\sigma_{r=R_e} = \frac{E}{1-\nu-2\nu^2}\cdot\left[A\cdot(1+\nu)-\frac{2B}{r^3}\cdot(1-2\nu)\right] = -p_e$$

de unde se obțin expresiile pentru cele două constante de integrare:

$$A = \frac{1-\nu-2\nu^2}{(1+\nu)E}\cdot\frac{R_i^3 p_i - R_e^3 p_e}{R_e^3 - R_i^3}$$

$$B = \frac{1-\nu-2\nu^2}{2\cdot(1-2\nu)E}\cdot\frac{R_i^3 R_e^3 (p_i - p_e)}{R_e^3 - R_i^3}$$

Expresia deplasării radiale este acum de forma:

$$u = \frac{1-\nu-2\nu^2}{(R_e^3 - R_i^3)E}\cdot\left[\frac{R_i^3 p_i - R_e^3 p_e}{1+\nu}\cdot r\right] + \frac{p_i - p_e}{2\cdot(1-2\nu)}\cdot\frac{R_i^3 R_e^3}{r^3} \qquad 8.5\text{-}10$$

iar cea a tensiunilor normale principale de forma:

$$\sigma_r = \frac{R_i^3 p_i - R_e^3 p_e}{R_e^3 - R_i^3} - \frac{R_i^3 R_e^3\cdot(p_i - p_e)}{R_e^3 - R_i^3}\cdot\frac{1}{r^3} \qquad 8.5\text{-}11a$$

$$\sigma_t = \frac{R_i^3 p_i - R_e^3 p_e}{R_e^3 - R_i^3} + \frac{R_i^3 R_e^3\cdot(p_i - p_e)}{R_e^3 - R_i^3}\cdot\frac{1}{2r^3} \qquad 8.5\text{-}11b$$

Se constată că în cazul vasului sferic cu perete gros, tensiunile normale principale, radiale respectiv circumferențiale, variază pe grosimea peretelui după o hiperbolă de gradul trei.

Se pot studia acum câteva cazuri particulare, care prezintă interes în activitatea productivă:

- *vasul supus numai la presiune interioară ($p_e = 0$)*

Tensiunile normale principale au expresiile:

$$\sigma_r = \frac{R_i^3 p_i}{R_e^3 - R_i^3} \cdot \left(1 - \frac{R_e^3}{r}\right) < 0$$
$$\sigma_t = \frac{R_i^3 p_i}{R_e^3 - R_i^3} \cdot \left(1 + \frac{R_e^3}{r}\right) > 0 \qquad 8.5\text{-}12$$

➢ La suprafața interioară, unde $r = R_i$

$$\sigma_{ri} = -p_i$$
$$\sigma_{ti} = \frac{2R_i^3 + R_e^3}{2 \cdot (R_e^3 - R_i^3)} \cdot p_i \qquad 8.5\text{-}13$$

➢ La suprafața exterioară, unde $r = R_e$

$$\sigma_{re} = 0$$
$$\sigma_{te} = \frac{3R_i^3}{2 \cdot (R_e^3 - R_i^3)} \cdot p_i \qquad 8.5\text{-}14$$

La suprafața interioară unde tensiunile au valorile cele mai mari, se realizează o stare spațială de tensiune, iar calculul de rezistență trebuie făcut după una din teoriile de rezistență. Astfel, după teoria a III-a de rezistență, trebuie satisfăcută condiția:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_t - \sigma_r}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{2R_i^3 + R_e^3}{2 \cdot \left(R_e^3 - R_i^3\right)} \cdot p_i + p_i \le \frac{\sigma_a}{2}\right] \qquad 8.5\text{-}15$$

de unde pentru calculul de dimensionare, rezultă mărimea razei exterioare (se consideră că raza interioară se impune datorită necesităților):

$$R_e = R_i \cdot \sqrt[3]{\frac{2\sigma_a}{2\sigma_a - 3p_i}} \qquad 8.5\text{-}16$$

Din 8.5-16 rezultă că expresia de sub radical trebuie să fie pozitivă, ceea ce conduce la condiția impusă pentru dimensionare:

$$2\sigma_a - 3p_i > 0 \quad \Rightarrow \quad p_i < \frac{2}{3}\sigma_a \qquad 8.5\text{-}17$$

- *vasul solicitat numai la presiune exterioară ($p_i = 0$)*

Expresiile tensiunilor normale principale sunt:

$$\sigma_r = -\frac{R_e^3 p_e}{R_e^3 - R_i^3} \cdot \left(1 - \frac{R_i^3}{r}\right)$$
$$\sigma_t = -\frac{R_e^3 p_e}{R_e^3 - R_i^3} \cdot \left(1 + \frac{R_i^3}{r}\right) \qquad 8.5\text{-}18$$

cu

$$|\sigma_t| > |\sigma_r|$$

- La suprafața interioară, unde $r = R_i$

$$\sigma_{ri} = 0$$
$$\sigma_{ti} = -\frac{3 R_e^3 p_e}{2 \cdot \left(R_e^3 - R_i^3\right)} \qquad 8.5\text{-}19$$

- La suprafața exterioară, unde $r = R_e$

$$\sigma_{re} = -p_e$$
$$\sigma_{te} = -\frac{R_i^3 + 2 R_e^3}{2 \cdot \left(R_e^3 - R_i^3\right)} \cdot p_e \qquad 8.5\text{-}20$$

Şi pentru vasul sferic solicitat numai la presiune exterioară, tensiunea maximă se produce tot la suprafața interioară. Pentru acest caz, condiția de rezistență după teoria a III-a, este de forma:

$$\frac{3 R_e^3 p_e}{2 \cdot \left(R_e^3 - R_i^3\right)} \le \sigma_a \quad \Rightarrow \quad R_e = R_i \cdot \sqrt[3]{\frac{2\sigma_a}{2\sigma_a - 3 p_e}} \qquad 8.5\text{-}21$$

În cazul bilei pline ($R_i = 0$) , se obține pentru toate punctele

$$\sigma_r = \sigma_t = -p_e \qquad 8.5\text{-}22$$

iar dacă $R_i \to 0$ la $r = R_i$ datorită efectului de concentrare, se obține:

$$\sigma_t = -1{,}5\, p_e \qquad 8.5\text{-}23$$

9. SOLICITĂRI PESTE LIMITA DE ELASTICITATE

9.1 CONSIDERAȚII GENERALE

Diagrama caracteristică la întindere a unui material, caracterizează proprietățile acelui material la solicitarea de întindere. Această curbă este însă una convențională. Dacă pentru încărcări mici aria secțiunii transversale a epruvetei rămâne practic constantă, la atingerea limitei de curgere, micşorarea acestei arii devine sensibilă. La început, contracția transversală este uniformă pe întreaga lungime a epruvetei, iar după ce rezistența la rupere este depăşită, contracția transversală este accentuată şi capătă un caracter local. De aici rezultă că după atingerea limitei de curgere, ordonatele diagramei caracteristice sunt mărimi convenționale, deoarece forța din timpul solicitării s-a raportat la aria inițială a secțiunii A_0 şi nu la cea reală. Atâta timp cât tensiunea nu depăşeşte rezistența la rupere, alungirea materialului depinde exclusiv da natura acestuia. Dar, după producerea gâtuirii, alungirea depinde şi de raportul dintre dimensiunile epruvetei (lungime şi diametru) şi astfel alungirea nu mai constituie o caracteristică numai de material. Din aceste considerente, pentru obținerea unei reprezentări grafice care să caracterizeze mai fidel proprietățile materialului, se trasează aşa numita *diagramă caracteristică reală la întindere***.** Aceasta ilustrează relația dintre tensiune şi deformațiile din secțiunea epruvetei în care se produce ruperea.

Pentru trasarea diagramei reale la întindere, este necesar să se noteze la diferite momente ale solicitării, valoarea forței care întinde epruveta şi în acelaşi timp să se măsoare dimensiunile transversale ale epruvetei în porțiunea cea mai îngustă. Cu aceste dimensiuni se calculează aria secțiunii reale a epruvetei pentru fiecare moment în care se fac măsurătorile.

Coordonatele unui punct al diagramei reale se determină cu relațiile:

- pentru abscisă:

$$\psi_t = \frac{A_0 - A_t}{A_0} \qquad 9.1\text{-}1$$

- pentru ordonată:

$$\sigma_{real} = \frac{F_t}{A_t} \qquad 9.1\text{-}2$$

unde:

A_0 - aria inițială a secțiunii transversale a epruvetei

A_t - aria minimă a secțiunii transversale a epruvetei în acel moment

F_t - valoarea forței de întindere din momentul considerat.

În Fig.9.1-1 se prezintă forma diagramei reale la întindere pentru o epruvetă realizată din oțel pentru şinele de cale ferată.

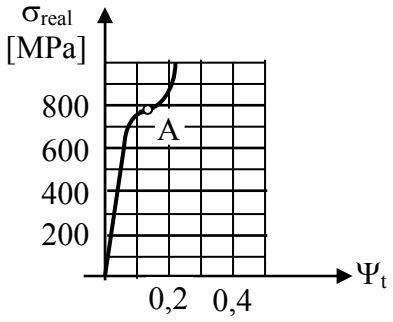


Fig.9.1-1

După cum se poate constata, în momentul ruperii, tensiunea calculată pe baza ariei reale a secțiunii, este mai mare decât cea calculată prin procedeul obişnuit. Punctul *A*, corespunde atingerii sarcinii maxime din timpul încercării.

Deoarece sarcina maximă la care rezistă epruveta nu corespunde momentului ruperii ci unui moment anterior, în calcule se utilizează tensiunea corespunzătoare sarcinii maxime şi nu tensiunea reală maximă, care de fapt corespunde momentului ruperii epruvetei.

Diagrama caracteristică reală, permite stabilirea unor caracteristici mecanice noi pentru materialul respectiv.

Ordonatele diagramei caracteristice reale, caracterizează proprietățile materialului de a rezista la deformația plastică.

Pentru a mări deformația plastică (permanentă, remanentă), materialul trebuie supus la tensiuni tot mai mari. Pe măsură ce deformația plastică creşte, materialul îi opune o rezistență din ce în ce mai mare. Acest fenomen poartă numele de *consolidare, ecruisare sau întărire.* Proprietatea materialului de a se ecruisa este caracterizată prin panta diagramei reale. Tensiunea pentru punctul *A*, (Fig.9.1-1), corespunzător atingerii sarcinii maxime, se numeşte *rezistență reală de rupere***,** iar tensiunea punctului de la extremitatea curbei reale, se numeşte *rezistența în momentul ruperii*. Abscisele diagramei reale caracterizează proprietatea materialului de a se deforma plastic, exprimând aceasta în funcție de contracția specifică. Această contracție până în punctul *A*, poate fi considerată uniformă pe întreaga lungime a epruvetei, numindu-se *contracție uniformă* şi caracterizează proprietatea materialului de a se deforma în ansamblu. Diferența dintre *contracția totală* şi cea *uniformă* se numeşte *contracție locală* şi caracterizează proprietatea materialului de a suferi deformații locale (gâtuiri). Diagramele caracteristice reale au totuşi unele dezavantaje. Spre exemplu, în cazul deformațiilor mari, la calculul lungirii sau

contracției transversale specifice a epruvetei, nu mai poate fi neglijat faptul că dimensiunile inițiale ale epruvetei la care se raportează de obicei creşterea lungimii sau variația secțiunii, au variat considerabil în timpul deformării. Din acest motiv, drept caracteristici ale deformațiilor plastice mari se introduc aşa numitele *contracții transversale* şi *alungiri reale.*

Alungirea reală *A* şi contracția transversală reală Ψ raportate la lungirea şi la aria reală a secțiunii epruvetei corespunzătoare unui moment dat al încercării, pot fi calculate cu ajutorul relațiilor:

$$A = \int_{l_0}^{l_t} \frac{dl}{l} = \ln \frac{l_t}{l_0} \qquad 9.1\text{-}3$$

$$\Psi = \int_{A_t}^{A_0} \frac{dA}{A} = \ln \frac{A_0}{A_t} \qquad 9.1\text{-}4$$

Deoarece în cazul deformației plastice a corpului, volumul acestuia poate fi considerat constant, *V = ct.*, rezultă:

$$dV = l \cdot dA + A \cdot dl = 0 \qquad 9.1\text{-}5$$

de unde:

$$\frac{dl}{l} = \frac{dA}{A} \quad \Rightarrow \quad A = -\psi \qquad 9.1\text{-}6$$

ceea ce înseamnă că cele două caracteristici diferite ale deformației, (alungirea reală şi contracția transversală reală) sunt egale între ele, dar de sens opus.

Forma diagramei caracteristice reale depinde de:

- natura materialului
- temperatura de încercare
- viteza de deformare
- starea de tensiune.

Natura materialului (oțel, aluminiu, cupru), are influență asupra valorii absolute a ordonatelor diagramei şi asupra pantei acesteia, adică tocmai asupra capacității de ecruisare a materialului.

Temperatura de încercare a epruvetei are o mare influență asupra valorii rezistenței la deformare plastică. Cu creşterea temperaturii, această rezistență scade.

Creşterea vitezei de deformare, măreşte rezistența la deformații plastice. Diagramele caracteristice la întindere au panta cu atât mai mare cu cât creşte viteza de deformație.

Toate stările de tensiune în care tensiunile tangențiale sunt mici, corespund unor valori ridicate ale rezistenței la deformare plastică. Astfel, întinderea şi compresiunea uniformă după toate direcțiile, atât teoretic cât şi experimental, exclud posibilitatea producerii unor astfel de deformații. La stări de tensiune apropiate de întindere-compresiune uniformă după toate direcțiile, deformațiile plastice se produc numai atunci când valorile tensiunilor principale sunt foarte mari.

Trecerile bruşte de la o secțiune la alta (crestăturile, variația formei piesei, etc.) creează un câmp de tensiune caracterizat de obicei prin trei tensiuni normale principale de acelaşi semn. Un astfel de câmp de tensiune poate mări într-o măsură foarte mare rezistența materialului la deformațiile plastice din jurul acestora.

Rezistența la deformare plastică, studiată pe baza rezultatelor încercărilor la întindere este cea mai răspândită. Totuşi, datele privitoare la rezistența la deformare plastică, obținute pe această cale, sunt insuficient de exacte, chiar din momentul producerii gâtuirii.

Distribuția deformațiilor şi a tensiunilor în gâtuitură devine foarte neuniformă, motiv pentru care orice caracteristică a deformației poate fi considerată numai convențional drept caracteristică obținută într-o stare monoaxială de tensiune. Aceasta reduce considerabil valoarea rezultatelor încercărilor la întindere simplă.

Deoarece în cazul încercărilor la răsucire, deformația unor materiale chiar foarte plastice, rămâne îndeajuns de uniformă pe întreaga lungime a epruvetei (fără a se produce gâtuirea) până în momentul ruperii, se fac încercări la răsucire pentru obținerea diagramelor reale la deformație plastică. Aceste diagrame reale se construiesc în raport cu următoarele coordonate (Fig.9.1-2):

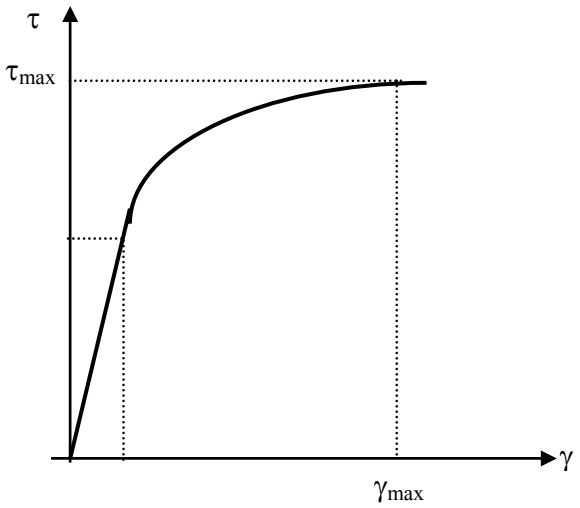


Fig.9.1-2

- ordonată: *tensiunea tangențială reală maximă*

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} \qquad 9.1\text{-}7$$

- abscisă: *lunecarea maximă*

$$\gamma_{max} = \varepsilon_{max} - \varepsilon_{min} \qquad 9.1\text{-}8$$

Şi acest procedeu de obținere a diagramelor caracteristice reale are unele dezavantaje. Astfel, la răsucirea epruvetelor de secțiune plină este greu să se țină seama de influența zonei centrale a barei care se deformează elastic iar la răsucirea epruvetelor tubulare, rezultatele încercărilor pot fi modificate datorită pierderii stabilității.

9.2 SCHEMATIZAREA DIAGRAMELOR CARACTERISTICE

Pentru calculele peste limita de elasticitate (în domeniul elasto-plastic), este necesar ca diagramele caracteristice să fie schematizate, adică aduse la forme care să fie cât mai apropiate de cele reale şi care să permită un calcul cât mai simplu.

În acest sens, mai întâi se trasează diagrama caracteristică convențională la întindere a materialului, după care se adoptă o curbă caracteristică schematizată care are pe toate porțiunile expresii analitice cât mai simple.

Pe baza diagramelor schematizate, calculul de rezistență se poate face prin: *metode analitice, grafo-analitice sau grafice*.

Schematizarea diagramelor caracteristice poate fi făcută prin:

- *linii drepte*
- *linii curbe continue*

În cazul materialelor care în domeniul elastic satisfac legea lui Hooke (diagrama caracteristică prezintă o porțiune rectilinie) se utilizează schematizarea prin linii drepte. Pentru un calcul mai simplu se consideră că limita de proporționalitate a materialului coincide cu limita de curgere.

Schematizarea printr-o linie curbă se utilizează în cazul materialelor care nu ascultă de legea lui Hooke.

În Fig.9.2-1 se prezintă o schematizare prin linii drepte a diagramei caracteristice. Pentru materialele care satisfac legea lui Hooke, în zona deformațiilor liniar elastice, se consideră că tensiunea normală creşte

proporțional cu alungirea. În zona deformațiilor plastice, schematizarea depinde de forma diagramei reale şi de mărimea porțiunii care trebuie schematizată.

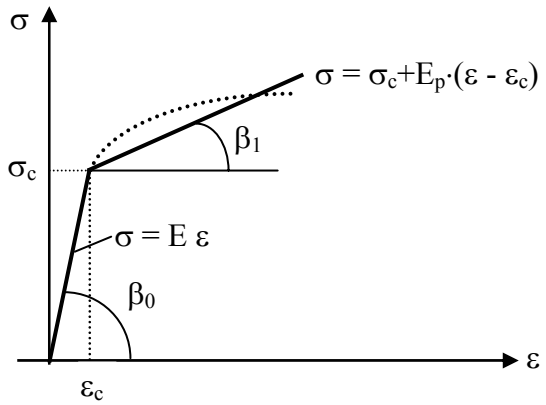


Fig.9.2-1

De cele mai multe ori, diagrama caracteristică se schematizează prin două drepte a căror ecuații sunt:

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \qquad \text{pentru} \qquad 0 < \varepsilon < \varepsilon_c \qquad 9.2\text{-}1$$

$$\sigma = \sigma_c + E_p \cdot (\varepsilon - \varepsilon_c) \qquad \text{pentru} \qquad \varepsilon > \varepsilon_c \qquad 9.2\text{-}2$$

unde:

ε_c - *alungirea corespunzătoare limitei de curgere*

$E_p = tg\beta_1$ - *modul de plasticitate, egal cu panta dreptei adoptate*

$E = tg\beta_0$ - *modul de elasticitate longitudinal inițial.*

Se poate constata că $E_p < E$.

Ținând seama că:

$$\sigma_c = E \cdot \varepsilon_c \qquad 9.2\text{-}3$$

relația pentru schematizarea zonei plastice devine:

$$\sigma = \sigma_c \cdot \left(1 - \frac{E_p}{E}\right) + E_p \cdot \varepsilon \qquad 9.2\text{-}4$$

Modul de schematizare prezentat, se utilizează pentru materiale care nu au limită de curgere pronunțată sau prezintă un palier de curgere scurt.

Materialele a căror diagramă caracteristică poate fi schematizată ca în Fig.9.2-1 se numesc *materiale elasto - plastice*.

Din diagrama prezentată în Fig.9.2-1, rezultă cazuri particulare de schematizare ale diagramelor caracteristice:

a) Dacă deformațiile elastice sunt neglijabile în comparație cu cele plastice, curba caracteristică poate fi schematizată printr-o singură linie dreaptă înclinată (Fig.9.2-2), de ecuație:

$$\sigma = \sigma_c + E_p \cdot \varepsilon \qquad 9.2\text{-}5$$

Un astfel de material este considerat rigid până la limita de curgere, iar apoi plastic. Aceste materiale sunt numite *rigido-plastice.*

b) Dacă palierul de curgere are lungime mare, zona deformațiilor plastice poate fi schematizată printr-o linie orizontală ($E_p = 0$), de ecuație (Fig.9.2-3):

$$\sigma = \sigma_c \qquad 9.2\text{-}6$$

Această diagramă este de tip Prandtl şi este destul de exactă în cazul oțelurilor cu un conținut mic de carbon şi al aluminiului.

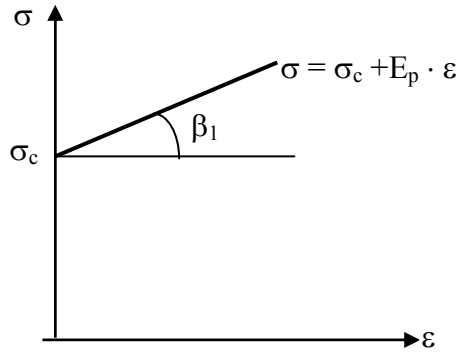


Fig.9.2-2

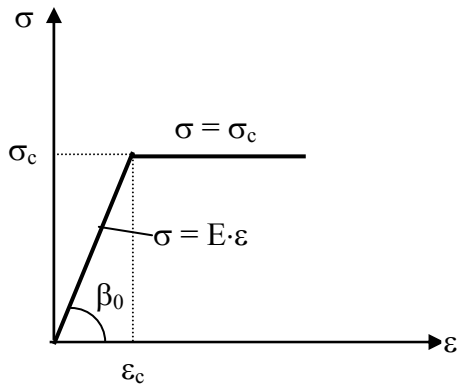


Fig.9.2-3

Diagrama de tip Prandtl contribuie la o mare simplificare a calculelor în acest domeniu. Diagrama corespunde materialelor care nu se ecruisează după depăşirea limitei de curgere, iar pentru calcule lungimea dreptei orizontale nu este limitată. Materialele care corespund unei astfel de schematizări sunt materiale *ideal elasto - plastice.*

c) Sunt situații când deformațiile elastice pot fi neglijate față de cele plastice. În acest caz diagrama caracteristică se poate schematiza printr-o singură dreaptă orizontală (Fig.9.2-4), ce corespunde limitei de curgere. Un astfel de material este *ideal plastic.*

După cum s-a mai afirmat, există materiale a căror comportare nu satisfac legea lui Hooke şi a căror curbă caracteristică este o curbă continuă începută

încă din originea sistemului de coordonate, (Fig.9.2-5). Aceasta poate fi asimilată cu aproximație, cu o curbă continuă de ecuație:

$$\varepsilon = \frac{\sigma^n}{E_0} \Rightarrow \sigma = \sqrt[n]{\varepsilon \cdot E_0} \qquad 9.2\text{-}7$$

unde:

n şi E_0 - constante care se determină astfel ca funcția adoptată să reprezinte o curbă cât mai apropiată de cea reală, determinată experimental.

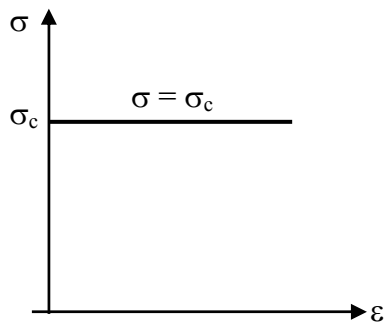


Fig.9.2-4

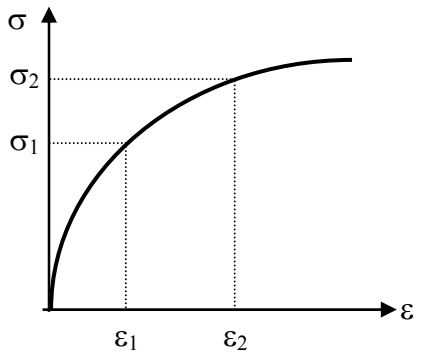


Fig.9.2-5

Introducând în relația 9.2-7 perechile de valori (ε_1, σ_1) şi (ε_2, σ_2) rezultă valorile constantelor *n* şi E_0 :

$$n = \frac{\log \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}{\log \frac{\sigma_2}{\sigma_1}} \qquad 9.2\text{-}8$$

$$E_0 = \frac{\sigma_1^n}{\varepsilon_1} \qquad 9.2\text{-}9$$

Aceste relații, cu referire la starea liniară de tensiune, între tensiunea normală şi alungire sunt valabile şi pentru starea de forfecare pură, adică între tensiunea tangențială şi lunecarea specifică.

9.3 CALCULUL ÎN DOMENIUL ELASTO - PLASTIC

Calculele de rezistența materialelor presupun că materialul elementului calculat satisface în întregime legea lui Hooke, adică tensiunile sunt proporționale cu deformațiile specifice produse. De asemenea deformațiile sunt considerate elastice şi tensiunile mai mici decât tensiunea corespunzătoare limitei de elasticitate a materialului.

În practică se întâlnesc destule cazuri la care legea lui Hooke nu mai este valabilă, fie datorită depăşirii limitei de proporționalitate a materialului prin solicitarea produsă, fie necomportării liniar elastice a acestuia. Din prima categorie fac parte unele procese tehnologice care produc deformații permanente mari, ca: forjarea, ambutisarea, laminarea, matrițarea etc. În aceste cazuri, deformațiile plastice fiind mari în comparație cu cele elastice şi ruperea producându-se mult după depăşirea limitei de curgere, materialul trebuie să prezinte proprietăți plastice foarte bune.

Din cea de a doua categorie, fac parte acele materiale a căror curbă caracteristică la tracțiune, nu prezintă nici o porțiune rectilinie. La materialele cu comportare neliniară, principiul suprapunerii efectelor, valabil în domeniul elastic, nu mai poate fi aplicat odată cu depăşirea limitei de elasticitate. În cazul deformațiilor plastice, atunci când limita de elasticitate este depăşită, starea finală de solicitare depinde de ordinea aplicării sarcinilor.

La operațiile tehnologice de laminare, forjare, matrițare etc., deformațiile corpului sunt mari în comparație cu dimensiunile inițiale ale acestuia şi ca urmare, nu mai poate fi aplicată nici ipoteza micilor deformații, atât de utilă în domeniul comportării liniar elastice.

Şi în domeniul nevalabilității legii lui Hooke, se pot stabili relații de calcul pentru corpurile solicitate.

Să presupunem că pentru un material dat, se cunoaşte diagrama tensiunilor reale obținută pe cale experimentală în urma solicitării de întindere (Fig.9.3-1).

Pentru $\varepsilon > \varepsilon_c$ relația dintre tensiuni şi deformații specifice este complicată şi neliniară.

Sub forma ei generală, această legătură poate fi exprimată printr-o relație de forma:

$$\sigma = \Phi(\varepsilon) \qquad 9.3\text{-}1$$

sau

$$\sigma = E_1 \cdot \varepsilon \qquad 9.3\text{-}2$$

unde

$$E_1 = tg\beta \qquad 9.3\text{-}3$$

Coeficientul E_1 numit *modul de elasticitate echivalent* are pentru fiecare punct al curbei caracteristice, o altă valoare.

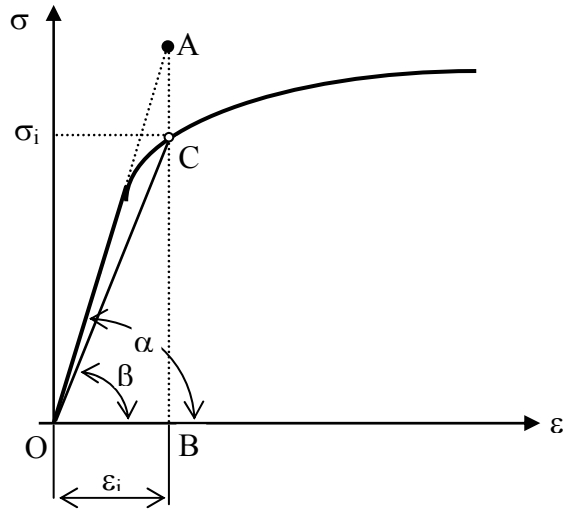


Fig.9.3-1

Din Fig.9.3-1 rezultă că:

$$tg\beta = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} \qquad 9.3\text{-}4$$

de unde

$$E_1 = \frac{\Phi(\varepsilon)}{\varepsilon} = \Psi(\varepsilon) \qquad 9.3\text{-}5$$

adică, E_1 este o funcție de deformație cunoscută, deoarece curba caracteristică este cunoscută.

Astfel, pentru deformații mai mari decât cele corespunzătoare limitei de elasticitate, legea deformațiilor poate fi exprimată prin relația:

$$\sigma_i = E_1 \cdot \varepsilon \qquad 9.3\text{-}6$$

Acceptând o analogie cu comportarea elastică a materialului peste limita de elasticitate, relațiile dintre tensiuni şi deformații specifice pot fi scrise sub forma:

$$\sigma_x - \sigma_m = \frac{E_1}{1+\nu} \cdot (\varepsilon_x - \varepsilon_m) \qquad 9.3\text{-}7a$$

$$\sigma_y - \sigma_m = \frac{E_1}{1+\nu} \cdot (\varepsilon_y - \varepsilon_m) \qquad 9.3\text{-}7b$$

$$\sigma_z - \sigma_m = \frac{E_1}{1+\nu} \cdot (\varepsilon_z - \varepsilon_m) \qquad 9.3\text{-}7c$$

$$\tau_{xy} = G_1 \cdot \gamma_{xy} \quad ; \quad \tau_{yz} = G_1 \cdot \gamma_{yz} \quad ; \quad \tau_{zx} = G_1 \cdot \gamma_{zx} \qquad 9.3\text{-}7d$$

unde:

$$G_1 = \frac{E_1}{2 \cdot (1+\nu)}$$ - *modul de elasticitate transversal echivalent* 9.3-8

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$$ - *tensiune medie* 9.3-9

$$\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3}$$ - *alungire medie* 9.3-10

iar,

$$\sigma_m = \frac{E}{1-2\nu} \cdot \varepsilon_m \qquad 9.3\text{-}11$$

Deoarece în domeniul deformațiilor plastice, volumul materialului nu se modifică (*V = ct.*), se poate considera coeficientul lui Poisson, $\nu = 0,5$, de unde:

$$G_1 = \frac{E_1}{3} \qquad 9.3\text{-}12$$

sau ținând seama de relația (9.3-6), relația (9.3-12) devine:

$$G_1 = \frac{\sigma_i}{3 \cdot \varepsilon_i} \qquad 9.3\text{-}13$$

Înlocuind relația (9.3-13) în relațiile (9.3-7), rezultă următoarea formă a relațiilor dintre tensiuni şi deformații specifice în domeniul deformațiilor plastice:

$$\sigma_x - \sigma_m = \frac{2 \cdot \sigma_i}{3 \cdot \varepsilon_i} \cdot (\varepsilon_x - \varepsilon_m) \qquad 9.3\text{-}14a$$

$$\sigma_y - \sigma_m = \frac{2 \cdot \sigma_i}{3 \cdot \varepsilon_i} \cdot \left(\varepsilon_y - \varepsilon_m\right) \qquad 9.3\text{-}14b$$

$$\sigma_z - \sigma_m = \frac{2 \cdot \sigma_i}{3 \cdot \varepsilon_i} \cdot \left(\varepsilon_z - \varepsilon_m\right) \qquad 9.3\text{-}14c$$

$$\tau_{xy} = \frac{\sigma_i}{3 \cdot \varepsilon_i} \cdot \gamma_{xy} \quad ; \quad \tau_{yz} = \frac{\sigma_i}{3 \cdot \varepsilon_i} \cdot \gamma_{yz} \quad ; \quad \tau_{zx} = \frac{\sigma_i}{3 \cdot \varepsilon_i} \cdot \gamma_{zx} \qquad 9.3\text{-}14d$$

unde:

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\left(\sigma_x - \sigma_y\right)^2 + \left(\sigma_y - \sigma_z\right)^2 + \left(\sigma_z - \sigma_x\right)^2 + 6 \cdot \left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)}$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{\left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right)^2 + \left(\varepsilon_y - \varepsilon_z\right)^2 + \left(\varepsilon_z - \varepsilon_x\right)^2 + 6 \cdot \left(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2\right)}$$

Dacă în Fig.9.3-1 porțiunea dreaptă inițială a diagramei caracteristice se prelungeşte până la intersecția cu verticala care trece prin punctul în care tensiunea este σ_i se poate scrie:

$$\sigma_i = \varepsilon_i \cdot \mathrm{tg}\alpha - AC \qquad 9.3\text{-}15$$

Segmentul *AC* depinde de ε_i şi în general creşte cu creşterea acestei deformații.

Să presupunem că relația dintre segmentul *AC* şi ε_i nu este cunoscută:

$$AC = \varphi\left(\varepsilon_i\right) \qquad 9.3\text{-}16$$

În acest caz, ştiind că $E = tg\ \alpha$ relația 9.3-15 poate fi scrisă astfel:

$$\sigma_i = E \cdot \varepsilon_i - \varphi\left(\varepsilon_i\right) \qquad 9.3\text{-}17a$$

sau,

$$\sigma_i = E \cdot \varepsilon_i \cdot \left[1 - \frac{\varphi\left(\varepsilon_i\right)}{E \cdot \varepsilon_i}\right] \qquad 9.3\text{-}17b$$

Notând

$$\frac{\varphi\left(\varepsilon_i\right)}{E \cdot \varepsilon_i} = \omega\left(\varepsilon_i\right)$$

relația 9.3-17b se poate scrie sub forma:

$$\sigma_i = E \cdot \varepsilon_i \cdot [1 - \omega(\varepsilon_i)] \qquad 9.3\text{-}17c$$

unde funcția $\omega(\varepsilon_i)$ este definită astfel:

$$\omega(\varepsilon_i) = 0 \quad \text{pentru} \quad \varepsilon_i < \varepsilon_e$$
$$\omega(\varepsilon_i) = \frac{\varphi(\varepsilon_i)}{E \cdot \varepsilon_i} \quad \text{pentru} \quad \varepsilon_i > \varepsilon_e$$

Comparând relația 9.3-17c cu relația 9.3-6, rezultă expresia pentru modulul de elasticitate echivalent:

$$E_1 = E \cdot [1 - \omega(\varepsilon_i)]$$
$$\Rightarrow \quad E_1 = E \cdot (1 - \omega) \qquad 9.3\text{-}17d$$

La fel se poate deduce relația pentru modulul de elasticitate transversal echivalent G_1:

$$G_1 = G \cdot (1 - \omega) \qquad 9.3\text{-}17e$$

Dacă curba caracteristică la tracțiune (Fig.9.3-1) se aproximează prin două linii drepte oblice (Fig.9.3-2), pentru $\varepsilon_i > \varepsilon_e = \varepsilon_c$ rezultă:

$$AC = AB - CD - DB = E \cdot \varepsilon_i - (\varepsilon_i - \varepsilon_c) \cdot tg\beta - E \cdot \varepsilon_c \qquad 9.3\text{-}18$$

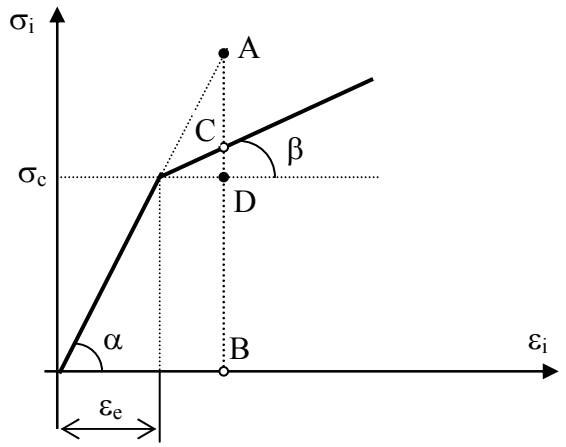


Fig.9.3-2

Notând $E_1 = tg\beta$ (modul de întărire) şi $\lambda = (E - E_1) / E$ (parametrul întăririi), rezultă:

$$AC = \lambda \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_i}\right) \cdot E \cdot \varepsilon_i = \varphi(\varepsilon_i) \qquad 9.3\text{-}19$$

sau ținând seama de expresia lui $\omega(\varepsilon_i)$, rezultă:

$$\omega(\varepsilon_i) = \frac{AC}{E \cdot \varepsilon_i} = \lambda \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_i}\right) \qquad 9.3\text{-}20$$

Pentru cazul diagramei din Fig.9.3-2, relația 9.3-17a care exprimă valoarea tensiunii σ_i la o deformație momentană ε_i devine:

$$\sigma_i = E \cdot \varepsilon_i \cdot \left[1 - \lambda \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_i}\right)\right] \qquad 9.3\text{-}21$$

În acest caz funcția $\omega(\varepsilon_i)$, (relația 9.3-20) se definește astfel:

$$\omega(\varepsilon_i) = 0 \qquad \text{pentru} \qquad \varepsilon_i < \varepsilon_c$$

$$\omega(\varepsilon_i) = \lambda \cdot \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_i}\right) \qquad \text{pentru} \qquad \varepsilon_i > \varepsilon_c$$

Pentru anumite materiale, funcția $\Phi(\varepsilon_i)$ poate fi aproximată uneori cu ajutorul unei relații de forma:

$$\sigma_i = \sigma_c \cdot \left(\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_c}\right)^m \qquad 9.3\text{-}22$$

unde,

0 < m < 1.

O curbă caracteristică exprimată prin relația 9.3-22 arată ca cea din Figura 9.3-3.

Pentru *m = 1*, materialul are o comportare ideal elastică (valabilă legea lui Hooke) iar pentru *m = 0,* materialul are o comportare ideal plastică.

Din cercetarea experimentală rezultă şi alte variante de diagrame caracteristice, exprimate prin alte forme ale funcției $\Phi(\varepsilon_i)$. Astfel, dacă în diagrama caracteristică se ține seama de trecerea lină (curbilinie) de la prima porțiune rectilinie (elastică) la porțiunea a treia (rectilinie-porțiunea corespunzătoare întăririi), făcând racordarea porțiunilor amintite după o parabolă de gradul *n* (Fig.9.3-4), rezultă:

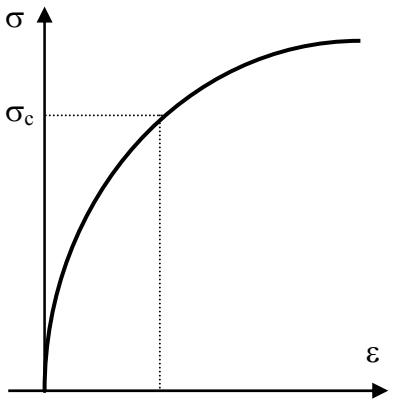


Fig.9.3-3

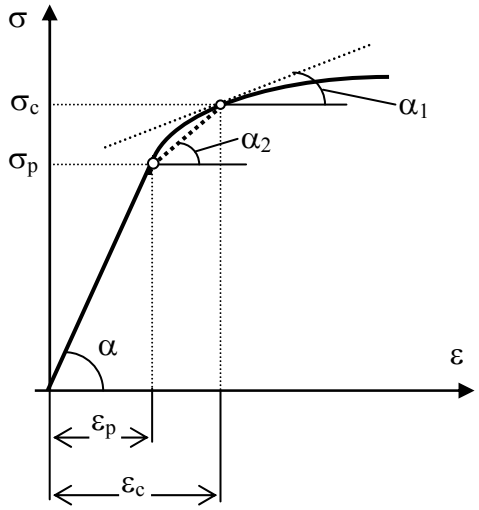


Fig.9.3-4

$$\sigma_i = \sigma_c - E_1 \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_i) - (E_2 - E_1) \cdot \frac{(\varepsilon_c - \varepsilon_i)^n}{(\varepsilon_c - \varepsilon_p)^{n-1}} \qquad 9.3\text{-}23$$

unde,

$$E = \mathrm{tg}\,\alpha \;\; ; \;\; E_1 = \mathrm{tg}\,\alpha_1 \;\; ; \;\; E_2 = \mathrm{tg}\,\alpha_2 \;\; ; \;\; n = \frac{E - E_1}{E_2 - E_1} \qquad 9.3\text{-}24$$

9.4 CRITERII DE PLASTICITATE

Un criteriu de plasticitate exprimă o ipoteză cu privire la limita comportării elastice a unui element de rezistență sub orice combinație posibilă de tensiuni. S-a constatat că o presiune hidrostatică σ_m nu modifică starea unui corp în ceea ce priveşte comportarea sa plastică. Într-un punct sau într-un anumit domeniu, starea de tensiune este caracterizată prin tensiunile principale σ_1 , σ_2, σ_3, care conduc la acelaşi comportament plastic. Rezultă atunci că un criteriu de plasticitate trebuie să fie exprimat printr-o funcție de forma:

$$f\left(|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_3 - \sigma_1|\right) = 0 \qquad 9.4\text{-}1$$

Această funcție rămâne invariabilă şi dacă tensiunile normale principale se înlocuiesc cu:

$$\sigma_1 + \sigma_m \;;\quad \sigma_2 + \sigma_m \;;\quad \sigma_3 + \sigma_m \qquad 9.4\text{-}2$$

Dacă $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, funcția 9.4-1 în forma ei cea mai simplă este:

$$|\sigma_1 - \sigma_3| = \text{ct.} \qquad 9.4\text{-}3$$

Criteriul de plasticitate, definit prin relația 9.4-3 este cunoscut sub numele de *criteriul Tresca*. După cum se observă, acest criteriu face abstracție de tensiunea principală σ_2.

Huber şi von Mises, propun pentru criteriul de plasticitate o relație în care intervine şi tensiunea normală principală σ_2, relație de forma:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = \text{ct.} \qquad 9.4\text{-}4$$

Pentru a se putea aplica relațiile 9.4-3 şi 9.4-4, trebuie determinate constantele care intervin în aceste relații.

În cazul solicitării simple de întindere, când $\sigma_1 = \sigma_c$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, rezultă că cele două constante sunt egale cu σ_c, respectiv $2\sigma_c^2$.

Pentru solicitarea de răsucire, când $\sigma_1 = \tau_c$; $\sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -\tau_c$ constantele sunt egale cu $2\tau_c$, respectiv $6\,\tau_c^2$.

Rezultă că cele două criterii de plasticitate pot fi scrise sub forma:

$$|\sigma_1 - \sigma_3| = \sigma_c = 2\,\tau_c \qquad 9.4\text{-}5a$$

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\,\sigma_c^2 = 6\,\tau_c^2 \qquad 9.4\text{-}5b$$

După cum se poate observa, între σ_c şi τ_c pentru cele două criterii se stabilesc următoarele relații:

- *criteriul Tresca*

$$\tau_c = \frac{1}{2} \cdot \sigma_C = 0{,}5 \cdot \sigma_C \qquad 9.4\text{-}6a$$

- *criteriul von Mises*

$$\tau_c = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sigma_C = 0{,}577 \cdot \sigma_C \qquad 9.4\text{-}6b$$

Aceste relații nu conduc la acelaşi rezultat, între ele existând o mică diferență. Cercetările experimentale au arătat că în general, la metale, criteriul von Mises este mai apropiat de realitate.

9.5. SOLICITĂRI SIMPLE ÎN DOMENIUL ELASTO - PLASTIC

9.5.1 Tracțiunea sau compresiunea în domeniul elasto – plastic

Fie o bară dreaptă de lungime *l* şi aria secțiunii transversale constantă *A*, solicitată de o forță axială *N*.

Tensiunea normală din secțiunea barei, este dată de relația cunoscută:

$$\sigma = \frac{N}{A} \qquad 9.5.1\text{-}1$$

Această valoare este valabilă chiar şi în domeniul elasto - plastic, deoarece este valabilă ipoteza lui Bernoulli. Alungirea ε se obține din diagrama caracteristică a materialului pentru tensiunea normală σ, iar lungirea totală este $\Delta l = \varepsilon l$.

Dacă se foloseşte o schematizare a curbei caracteristice prin două drepte (Fig.9.2-1), lungirea peste limita de curgere calculată cu relația 9.2-4, devine:

$$\Delta l = \left(\varepsilon_c + \frac{\sigma - \sigma_c}{E_p}\right) \cdot l = \frac{\sigma_c \cdot l}{E} + \left(\frac{N}{A} - \sigma_c\right) \cdot \frac{l}{E_p} \qquad 9.5.1\text{-}2$$

Dacă se neglijează deformația elastică ($E \to \infty$), conform Fig.9.2-2, se obține:

$$\Delta l = \left(\frac{N}{A} - \sigma_c\right) \cdot \frac{l}{E_p} \qquad 9.5.1\text{-}3$$

iar dacă se neglijează modulul de elasticitate, ($E_p \to 0$), conform Fig.9.2-4, lungirea plastică devine nedefinită, adică ea creşte dacă forța aplicată ce corespunde limitei de curgere σ_c se menține constantă.

În cazul schematizării printr-o curbă continuă de ecuație 9.2-7, conform Fig.9.2-5, lungirea totală este:

$$\Delta l = \frac{N^n \cdot l}{A^n \cdot E_o} \qquad 9.5.1\text{-}4$$

9.5.2 Încovoierea barelor drepte în domeniul elasto - plastic

Se consideră o porțiune dintr-o bară dreaptă solicitată la încovoiere plană pură (Fig.9.5.2-1).

Pentru simplificarea raționamentului s-a ales o bară de secțiune dreptunghiulară, iar materialul barei admite o curbă caracteristică de compresiune identică cu cea de la tracțiune. Momentul încovoietor M_i aplicat barei are o valoare suficient de mare ($M_i > \sigma_c \cdot W_z$) pentru a produce în secțiune şi deformații plastice.

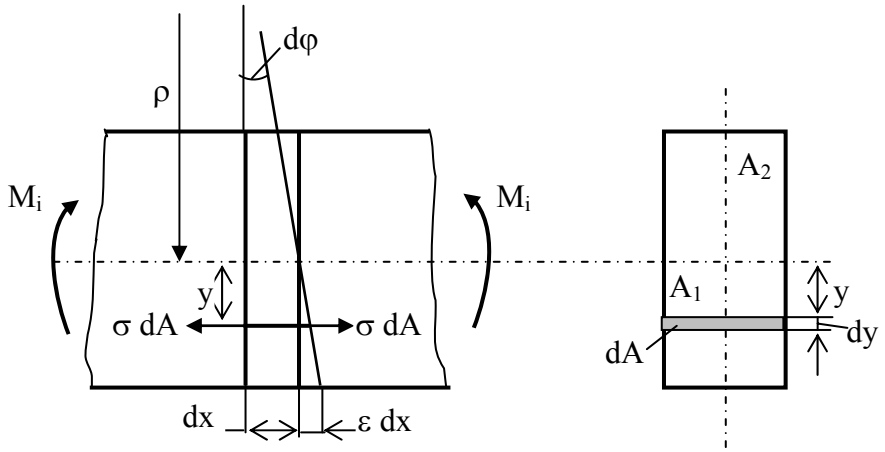


Fig.9.5.2-1

Şi în domeniul deformațiilor plastice, fiind valabilă ipoteza lui Bernoulli, alungirea în lungul unei fibre situată la distanța y de axa neutră, poate fi exprimată în funcție de raza de curbură ρ a fibrei medii deformate:

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho} \qquad 9.5.2\text{-}1$$

Acestor alungiri le corespund tensiuni normale orientate perpendicular pe secțiune. Relația dintre alungire şi tensiunea normală este impusă de curba caracteristică a materialului. Ținând seama de relația 9.5.2-1, se obține:

$$\sigma = \frac{1}{\rho} \cdot f(y) \qquad 9.5.2\text{-}2$$

Relația 9.5.2-2, arată că tensiunile normale produse la încovoiere sunt repartizate față de axa neutră pe înălțimea secțiunii după o lege asemănătoare cu cea exprimată de curba caracteristică a materialului.

Poziția axei neutre se poate obține din relația de echivalență a proiecțiilor efortului axial pe axa longitudinală a barei :

$$N = \int_A \sigma \cdot dA = 0 \qquad 9.5.2\text{-}3$$

De asemenea, se poate scrie:

$$M_{iz} = \int_A \sigma \cdot y \cdot dA \qquad 9.5.2\text{-}4$$

Dacă se cunoaşte curba caracteristică a materialului şi forma secțiunii transversale a barei, integrala din relațiile 9.5.2-3 şi 9.5.2-4 se poate calcula relativ uşor.

Să considerăm acum că materialul barei este ideal elasto - plastic, adică un material a cărui diagramă caracteristică este ca cea din Fig.9.2-3 . Pentru $\sigma < \sigma_c$, materialul are o comportare elastică, iar când $\sigma = \sigma_c$, materialul are proprietăți ideal plastice.

Se pot distinge mai multe stadii:

- *Stadiul elastic* se caracterizează printr-o variație liniară a tensiunilor normale pe secțiune (Fig.9.5.2-2a). Tensiunea maximă se poate calcula cu relația:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{iz}}{W_z} \qquad 9.5.2\text{-}5$$

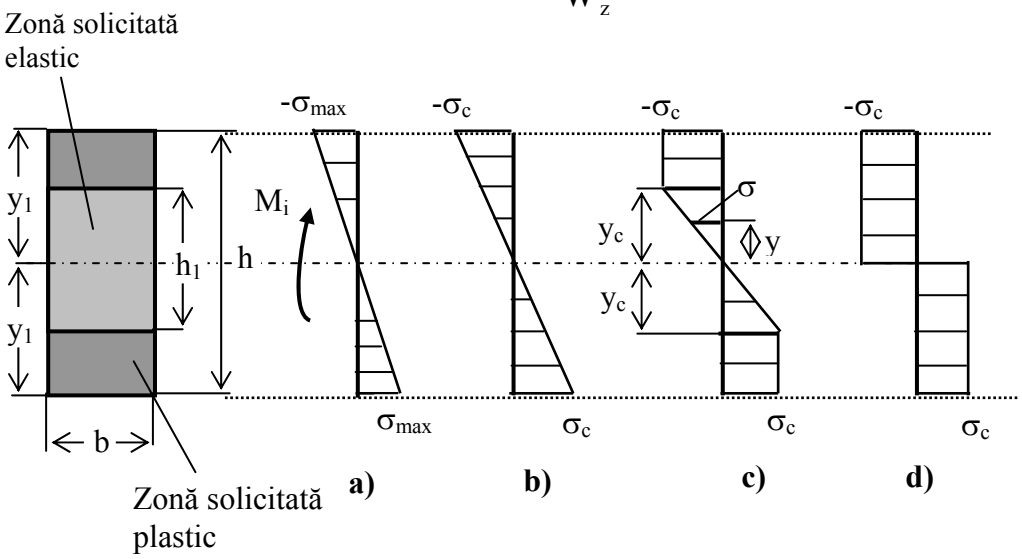


Fig.9.5.2-2

- *Stadiul elastic la limită*, când tensiunea normală maximă atinge valoarea tensiunii de curgere σ_c (Fig.9.5.2-2b). Relația pentru tensiunea maximă, rămâne valabilă dar egală cu tensiunea de curgere ($\sigma_{max} = \sigma_c$). În acest stadiu, momentul încovoietor capabil al secțiunii, este:

$$M_{ic} = W_z \cdot \sigma_c \qquad 9.5.2\text{-}6$$

- *Stadiul elasto - plastic*, când secțiunea prezintă o zonă deformată elastic (sâmbure elastic) în care tensiunea normală variază liniar şi două zone plastice în care tensiunea normală este constantă şi egală cu tensiunea de curgere σ_c şi cu $-\sigma_c$ în zona comprimată (Fig.9.5.2-2c). Relația lui Navier nu mai poate fi aplicată, iar axa neutră nu trece prin centrul de greutate, decât dacă ea este şi axă de simetrie a secțiunii. Zona plastică apare mai întâi în punctele cele mai îndepărtate de axa neutră a secțiunii şi ea se deplasează spre axa neutră odată cu creşterea momentului încovoietor. Pentru o valoare a momentului încovoietor M_L , toată secțiunea este deformată plastic (Fig.9.5.2-2d).

În stadiul elasto - plastic, când $M_{ic} < M_i < M_L$, pe baza relațiilor 9.2-1; 9.2-2; 9.2-3; 9.5.2-1, tensiunile normale se pot exprima astfel :

- *pentru zona elastică*:

$$\sigma = \frac{E \cdot y}{\rho} = \frac{y}{y_c} \cdot \sigma_c \qquad 9.5.2\text{-}7a$$

- *pentru zona plastică*:

$$\sigma = \sigma_c \qquad 9.5.2\text{-}7b$$

- *la separarea zonei elastice de cea plastică*:

$$\sigma = \sigma_c = \frac{E \cdot y_c}{\rho} \qquad 9.5.2\text{-}8$$

de unde rezultă raza de curbură a fibrei medii deformate:

$$\rho = \frac{E \cdot y_c}{\sigma_c} \qquad 9.5.2\text{-}9$$

Ținând seama de relațiile 9.5.2-7a şi 9.5.2-7b, relația 9.5.2-3 se poate scrie astfel:

$$-\int_{-y_1}^{-y_c} \sigma_c \, dA + \int_{-y_c}^{y_c} \frac{y}{y_c} \cdot \sigma_c \, dA + \int_{y_c}^{y_1} \sigma_c \, dA = 0 \qquad 9.5.2\text{-}10$$

sau:

$$-\sigma_c \int_{-y_1}^{-y_c} dA + \frac{\sigma_c}{y_c} \int_{-y_c}^{y_c} y\, dA + \sigma_c \int_{y_c}^{y_1} dA = 0$$

$$\int_{-y_1}^{y_c} dA + \int_{y_c}^{y_1} dA + \frac{1}{y_c} \int_{-y_c}^{y_c} y\, dA = 0$$

$$-A_{sp} + A_{ip} + \frac{1}{y_c} \cdot S_e = 0$$

$$y_c \cdot \left(-A_{sp} + A_{ip}\right) + S_e = 0 \qquad 9.5.2\text{-}11$$

unde:

A_{sp} - aria suprafeței superioare deformată plastic

A_{ip} - aria suprafeței inferioare deformată plastic

S_e - momentul static față de axa neutră al zonei centrale deformată elastic.

Dacă secțiunea este solicitată numai plastic ($S_e = 0$), rezultă:

$$A_{sp} = A_i \qquad 9.5.2\text{-}12$$

adică, aria suprafeței întinse prin încovoiere este egală cu aria suprafeței comprimate.

Procedând analog, relația 9.5.2-4 devine:

$$M_i = -\int_{-y_1}^{-y_c} \sigma_c\, y\, dA + \int_{-y_c}^{y_c} \frac{y}{y_c} \cdot \sigma_c\, y\, dA + \int_{y_c}^{y_1} \sigma_c\, y\, dA \neq 0 \qquad 9.5.2\text{-}13a$$

sau:

$$M_i = \sigma_c \cdot \left(W_e + S_p\right) \qquad 9.5.2\text{-}13b$$

unde:

$W_e = \frac{1}{y_c} \int_{-y_c}^{y_c} y^2\, dA$ - modulul de rezistență al zonei elastice, calculat față de axa neutră

$S_p = -\int_{-y_1}^{-y_c} y\, dA + \int_{y_c}^{y_1} y\, dA$ - suma valorilor absolute ale momentelor statice ale zonelor plastice, calculate față de axa neutră.

- *Stadiul plastic,* când întreaga secțiune se află deformată plastic. În acest caz, în zona întinsă, tensiunea normală σ este egală cu σ_c iar în zona comprimată, $\sigma = -\sigma_c$ (Fig.9.5.2-2d).

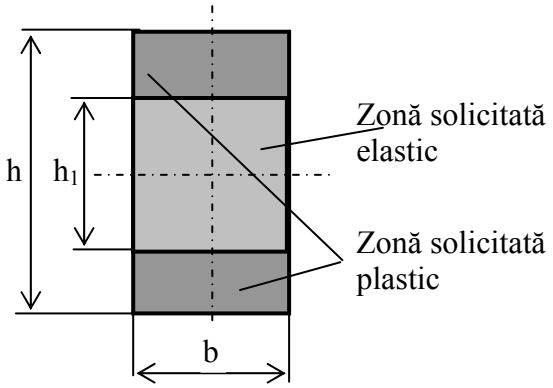
Din relația 9.5.2-13, punând condiția ca $W_e = 0$, rezultă:

$$M_L = \sigma_c \cdot S_p \qquad 9.5.2\text{-}14$$

În acest stadiu, secțiunea nu mai poate prelua nici o creştere de moment încovoietor, ea epuizându-şi întreaga sa capacitate de rezistență. Secțiunea lucrează ca o articulație (articulație plastică).

Aplicație

Să considerăm cazul barei drepte din figura de mai jos, de secțiune dreptunghiulară cu dimensiunile h şi b, solicitată la încovoiere.



Rezultă :

$$W_z = \frac{b\,h^2}{6} \quad ; \quad W_e = \frac{b\,h_1^2}{6} \qquad 9.5.2\text{-}15a$$

$$S_p = \frac{b \cdot \left(h^2 - h_1^2\right)}{4} \quad ; \quad h_1 = 2\,y_c \qquad 9.5.2\text{-}15b$$

În cele trei stadii, momentele încovoietoare sunt:

- *stadiul elastic la limită*:

$$M_{ic} = \frac{b\,h^2}{6} \cdot \sigma_{max} = \frac{b\,h^2}{6} \cdot \sigma_c \qquad 9.5.2\text{-}16$$

- *stadiul elasto-plastic:*

$$M_i = \sigma_c \cdot \left[\frac{b\,h_1^2}{6} + \frac{b \cdot \left(h^2 - h_1^2\right)}{4} \right] \qquad 9.5.2\text{-}17$$

- *stadiul plastic:*

$$M_L = \frac{b\,h^2}{4} \cdot \sigma_c \qquad 9.5.2\text{-}18$$

Se poate constata uşor că:

$$\frac{M_L}{M_{ic}} = \frac{\frac{b\,h^2}{4} \cdot \sigma_c}{\frac{b\,h^2}{6} \cdot \sigma_c} = \frac{6}{4} = 1{,}5 \qquad 9.5.2\text{-}19$$

sau,

$$M_L = 1{,}5 \cdot M_{ic} \qquad 9.5.2\text{-}20$$

adică, în cazul articulației plastice se obține un spor de capacitate de 50% față de cazul când tensiunea maximă este egală cu cea de curgere ($\sigma_{max} = \sigma_c$).

9.5.3 Tensiuni şi deformații remanente la încovoierea în domeniul elasto – plastic

Se consideră stadiul elasto - plastic pentru o secțiune solicitată la încovoiere simplă (Fig.9.5.3-1a).

Dacă se presupune că momentul încovoietor dat de relația 9.5.2-17 încetează să mai acționeze asupra secțiunii, tensiunile nu vor mai tinde către zero. Din cauza depăşirii limitei de curgere a materialului, vor rămâne pe secțiune, tensiuni şi deformații diferite de zero. Aceste tensiuni şi deformații, se numesc tensiuni remanente respectiv, *deformații remanente* (sau permanente). Este cunoscut faptul, că descărcarea unei epruvete solicitată la tracțiune peste limita de elasticitate, se realizează liniar cu un modul de elasticitate longitudinal *E*, egal cu cel de la încărcare, iar epruveta prezintă după descărcare o alungire remanentă ε_0. Analiza fenomenului de încărcare şi descărcare, permite determinarea tensiunilor şi deformațiilor remanente. La încărcarea grinzii peste limita de curgere este necesar un moment încovoietor M_i (Fig.9.5.3-1a):

$$M_i = \sigma_c \cdot (W_e + S_p) \qquad 9.5.3\text{-}1$$

Peste această stare se aplică pentru descărcare, un moment egal şi de sens contrar, sub acțiunea căruia grinda se comportă elastic, producându-se tensiunea maximă σ_0 (Fig.9.5.3-1b):

$$M_i = \sigma_0 \cdot W_z \qquad 9.5.3\text{-}2$$

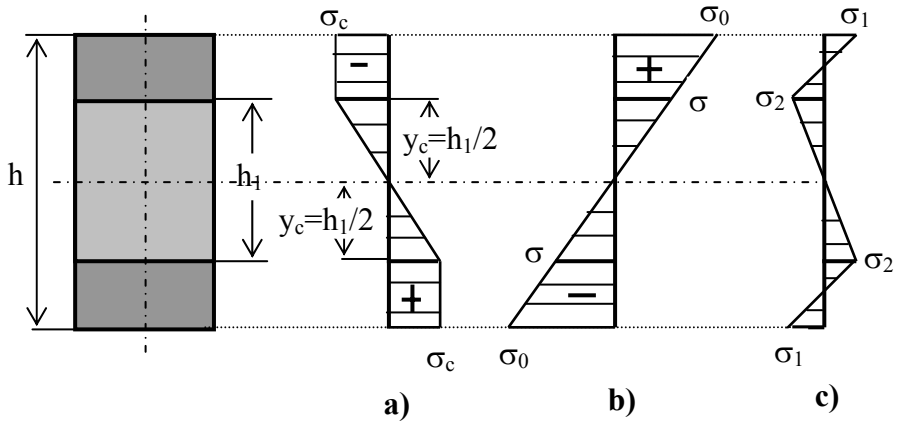


Fig.9.5.3-1

Egalând relațiile 9.5.3-1 şi 9.5.3-2, rezultă:

$$\sigma_c \cdot (W_e + S_p) = \sigma_0 W_z \qquad 9.5.3\text{-}3a$$

de unde:

$$\sigma_0 = \frac{W_e + S_p}{W_z} \cdot \sigma_c > \sigma_c \qquad 9.5.3\text{-}3b$$

Tensiunile remanente rezultă ca diferența dintre tensiunea produsă la încărcare şi cea produsă la descărcare.

Astfel:

$$\sigma_1 = \sigma_c - \sigma_0 = \left(1 - \frac{W_e + S_p}{W_z}\right) \cdot \sigma_c \qquad 9.5.3\text{-}4a$$

$$\sigma_2 = \sigma_c - \sigma = \sigma_c - \frac{2y_c}{h} \cdot \sigma_0 = \left(1 - \frac{2y_c}{h} \cdot \frac{W_e + S_p}{W_z}\right) \cdot \sigma_c \qquad 9.5.3\text{-}4b$$

Procedând asemănător şi utilizând relația 9.5.2-4 se poate determina şi raza de curbură remanentă. Raza de curbură pentru starea elasto - plastică este :

$$\rho_p = \frac{E\,y_c}{\sigma_c} \qquad 9.5.3\text{-}5$$

iar pentru starea elastică:

$$\rho_e = \frac{E\,I_z}{M_{iz}} \qquad 9.5.3\text{-}6$$

unde:

EI_z - rigiditatea grinzii la încovoiere în domeniul elastic.

Raza de curbură remanentă se obține prin diferența:

$$\rho_r = \rho_p - \rho_e = \frac{E\,y_c}{\sigma_c} - \frac{E\,I_z}{M_{iz}} \qquad 9.5.3\text{-}7$$

Aplicație

Să se determine tensiunile remanente pentru cazul unei bare drepte de secțiune dreptunghiulară cu dimensiunile h şi b, solicitată la încovoiere peste limita de curgere. Înălțimea zonei solicitată elastic este h_1 (vezi Aplicația anterioară).

Se determină:

$$W = \frac{b\,h^2}{6} \;;\; W_e = \frac{b\,h_1^2}{6} \;;\; S_p = \frac{b\cdot\left(h^2 - h_1^2\right)}{4} \;;\; h_1 = 2\,y_c$$

Relația 9.5.3-4, conduce la:

$$\sigma_2 = \left[1 - \frac{3}{2}\cdot\frac{h_1}{h} + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{h_1}{h}\right)^2\right]\cdot\sigma_c$$

$$\sigma_1 = \left[1 - \frac{\dfrac{b\,h_1^2}{6} + \dfrac{b\cdot\left(h^2 - h_1^2\right)}{4}}{\dfrac{b\,h^2}{6}}\right]\cdot\sigma_c = \left[\left(\frac{h_1}{h}\right)^2 - 1\right]\cdot\frac{\sigma_c}{2}$$

9.5.4 Torsiunea barelor drepte circulare în domeniul elasto - plastic

Se consideră o bară dreaptă de secțiune circulară cu raza *R*, solicitată la torsiune, de momentul de torsiune M_t (Fig.9.5.4-1).

Secțiunea transversală are o zonă solicitată elastic de rază *a* şi o zonă plastică de formă inelară de grosime *R* - *a*. În acest caz, distribuția tensiunilor este prezentată în Fig.9.5.4-1a. În domeniul elastic tensiunea este liniară, iar în cel plastic, constantă, egală cu tensiunea de curgere, τ_c .

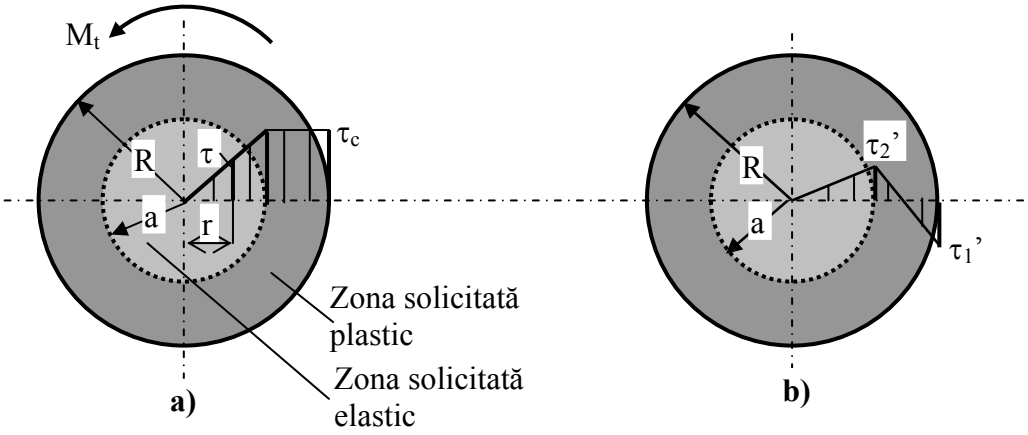


Fig.9.5.4-1

În zona elastică la distanța *r*, tensiunea tangențială τ se determină uşor:

$$\frac{\tau}{r} = \frac{\tau_c}{a} \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{r}{a} \cdot \tau_c \qquad 9.5.4\text{-}1$$

În zona plastică:

$$\tau = \tau_c \qquad 9.5.4\text{-}2$$

Această stare de solicitare este cauzată de acțiunea momentului de torsiune:

$$M_t = \int_A r\,\tau\,dA = \int_0^a r\,\frac{r}{a} \cdot \tau_c\,dA + \int_a^R r\,\tau_c\,dA \qquad 9.5.4\text{-}3$$

$$M_t = \frac{\tau_c}{a} \cdot \int_0^a r^2\,dA + \tau_c \cdot \int_a^R r\,dA = \tau_c \cdot \left[\frac{\int_0^a r^2\,dA}{a} + \int_a^R r\,dA \right] \qquad 9.5.4\text{-}4a$$

unde:

$$\frac{\int_0^a r^2\, dA}{a} = W_p$$ - modulul de rezistență polar al zonei solicitată elastic

$$\int_0^a r^2\, dA = I_p$$ - momentul de inerție polar al zonei solicitată elastic

iar,

$$\int_a^R r\, dA = \int_a^R r \cdot 2\pi r\, dr = 2\pi \int_a^R r^2\, dr = \frac{2\pi}{3} \cdot \left(R^3 - a^3\right) \qquad 9.5.4\text{-}4b$$

Ținând seama de relațiile de mai sus, relația 9.5.4-4a devine:

$$M_t = \tau_c \cdot \left[W_p + \frac{2\pi}{3} \cdot \left(R^3 - a^3\right) \right] \qquad 9.5.4\text{-}5a$$

sau:

$$M_t = \tau_c \cdot \left[\frac{\pi a^3}{2} + \frac{2\pi}{3} \cdot \left(R^3 - a^3\right) \right] = \frac{\pi \tau_c}{6} \cdot \left(4R^3 - a^3\right) \qquad 9.5.4\text{-}5b$$

Când $a = R$ (toată secțiunea este solicitată elastic), din relația 9.5.4-5b se obține expresia momentului de torsiune pentru stadiul elastic la limită:

$$M_t = \frac{\pi \cdot R^3}{2} \cdot \tau_c \qquad 9.5.4\text{-}6$$

iar pentru $a = 0$ (articulație plastică) se obține:

$$M_{tL} = \frac{2\pi \cdot R^3}{3} \cdot \tau_c \qquad 9.5.4\text{-}7$$

Făcând raportul M_{tL} / M_t rezultă:

$$\frac{M_{tL}}{M_t} = \frac{\frac{2\pi R^3}{3} \cdot \tau_c}{\frac{\pi R^3}{2} \cdot \tau_c} = \frac{4}{3} = 1{,}33 \qquad 9.5.4\text{-}8a$$

sau:

$$M_{tL} = 1{,}33 \cdot M_t \qquad 9.5.4\text{-}8b$$

Din relația 9.5.4-8b reiese că, la răsucire în domeniul plastic, capacitatea de rezistență a secțiunii circulare este cu 33% mai mare decât cea dată de metoda rezistențelor admisibile.

9.5.5 Tensiuni remanente în cazul răsucirii barei drepte circulare în domeniul elasto - plastic

După încetarea acțiunii momentului de torsiune M_t (relația 9.5.4-5b) apar tensiuni tangențiale remanente. Acestea se determină ca şi la solicitarea de încovoiere în domeniul elasto - plastic, având în vedere că descărcarea elastică este liniară. La distanța r de centrul secțiunii, tensiunea tangențială τ_1 se determină cu relația cunoscută:

$$\tau_1 = \frac{M_t}{I_p} \cdot r = \frac{\frac{\pi \tau_c}{6} \cdot \left(4R^3 - a^3\right)}{\frac{\pi R^4}{2}} \cdot r = \frac{\tau_c}{3} \cdot \left[4 - \left(\frac{a}{R}\right)^3\right] \cdot \frac{r}{R} \qquad 9.5.5\text{-}1$$

Tensiunea remanentă τ_{re} se obține scăzând din tensiunea τ dată de relația 9.5.4-1, tensiunea τ_1 dată de relația 9.5.5-1. Se obține astfel:

- *în zona elastică (r < a)*:

$$\tau_{re} = \tau - \tau_1 = \left[1 - \frac{4}{3} \cdot \frac{a}{R} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a}{R}\right)^4\right] \cdot \frac{r}{a} \cdot \tau_c \qquad 9.5.5\text{-}2$$

- *în zona plastică (r > a)*:

$$\tau_{re} = \tau_c - \frac{\tau_c}{3} \cdot \left[4 - \left(\frac{a}{R}\right)^3\right] \cdot \frac{r}{R} = \left\{1 - \left[\frac{4}{3} \cdot \frac{a}{R} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{a}{R}\right)^4\right] \cdot \frac{r}{a}\right\} \cdot \tau_c \qquad 9.5.5\text{-}3$$

Se poate constata că pe secțiune, tensiunea tangențială remanentă variază liniar (Fig.9.5.4-1b).

Tensiunile tangențiale remanente maxime, în valoare absolută sunt:

- *pentru r = R* (la suprafața exterioară):

$$\tau_1' = \left[1 - \left(\frac{a}{R}\right)^3\right] \cdot \frac{\tau_c}{3} \qquad 9.5.5\text{-}4a$$

- *pentru r = a* (la nivelul de separare a zonei elastice de cea plastică):

$$\tau_2^{'} = \left[1 - \frac{4}{3}\cdot\left(\frac{a}{R}\right) + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{a}{R}\right)^4\right]\cdot\tau_c \qquad 9.5.5\text{-}4b$$

9.5.6 Răsucirea simplă a unei bare drepte de secțiune transversală oarecare, în domeniul elasto - plastic

Din teoria răsucirii elastice a unei bare drepte de secțiune transversală oarecare, se ştie că singurele tensiuni diferite de zero sunt τ_{xy} şi τ_{zx} .

Aceste tensiuni pot fi determinate astfel:

$$\tau_{xy} = \frac{\partial F}{\partial z} \quad ; \quad \tau_{xz} = \frac{\partial F}{\partial y} \qquad 9.5.6\text{-}1$$

unde:

F - o funcție constantă pe contur. În cazul secțiunilor dublu conexe, *F = 0*. Ținând seama că:

$$\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} \qquad 9.5.6\text{-}2$$

condiția de plasticitate $\tau = \tau_c$, devine:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 = \tau_c^2 \qquad 9.5.6\text{-}3$$

Momentul de răsucire, pentru o secțiune transversală simplu conexă aflată într-o stare plastică, este:

$$M_t = \iint_D \left(\tau_{xy}\, z - \tau_{xz}\, y\right) dz\, dy = \iint_D \left(z\frac{\partial F}{\partial z} + y\frac{\partial F}{\partial y}\right) dy\, dz =$$

$$= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial z}(z\,F) + \frac{\partial}{\partial y}(y\,F) - 2\,F \right] dy\,dz =$$

$$= -\int_\Gamma (z\,dy - y\,dz)F + 2\iint_D F(z,y)\cdot dz\,dy =$$

$$= -F\int_\Gamma (z\,dy - y\,dz) + 2\iint_D F(z,y)\cdot dz\,dy$$

$$\Rightarrow \quad M_t = 2\cdot\iint_D F(z,y)dz\,dy \qquad 9.5.6\text{-}4$$

La determinarea relației 9.5.6-4 s-a considerat $F = ct. = 0$.

Aşadar, din relația 9.5.6-4, rezultă că determinarea momentului de torsiune în cazul unei bare drepte de secțiune transversală simplu conexă, se reduce la determinarea dublului volumului cuprins între planul *xOy* şi suprafața $z = F(z,y)$, unde funcția $F(z,y)$ satisface următoarele condiții.:

- este nulă pe conturul secțiunii
- suprafața $x = F(z,y)$ are pantă constantă şi egală cu τ_c în raport cu planul *zOy*.

În practică se utilizează o altă funcție $\Phi(z,y)$ nulă pe contur, în care suprafața $x = \Phi(z,y)$ are panta constantă, egală cu unitatea (generatoarele ei fac unghiuri de 45^0 cu planul *zOy*). În acest caz, momentul de răsucire corespunzător cazului când întreaga secțiune se află în stare plastică, se determină cu relația:

$$M_t = 2\cdot\tau_c\cdot V \qquad 9.5.6\text{-}5$$

unde:

τ_c - limita de curgere

V - domeniul cuprins între suprafața $x = \Phi(z,y)$ şi planul *zOy*.

Cazuri particulare:

- *Cazul secțiunii dreptunghiulare (Fig.9.5.6-1a)*

Suprafața $x = \Phi(z,y)$ este dată de planele înclinate la 45^0 față de planul *zOy*, având forma unui acoperiş. Muchiile de discontinuitate sunt în plan, drepte, egal distanțate de laturi: *AE* egal distanțată de *AB* şi *AD* ; *DE* egal distanțată de *DA* şi *DC* şi *EF* egal distanțată de *AB* şi *CD*. Volumul închis de această suprafață se poate descompune în volumul unei piramide cu baza un pătrat de latură *b* şi înălțime *b/2* şi volumul unei prisme cu baza un triunghi isoscel cu baza *b* şi înălțimea *b/2*, înălțimea prismei fiind *a - b*. Rezultă atunci că:

$$V = \frac{1}{3} \cdot b^2 \cdot \frac{b}{2} - \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{b}{2} \cdot (a - b) = \frac{b^2 \cdot (3a - b)}{12} \qquad 9.5.6\text{-}7$$

Momentul de torsiune capabil, determinat pe baza relației 9.5.6-5 este:

$$M_{td} = \frac{b^2 \cdot (3a - b)}{12} \cdot \tau_c \qquad 9.5.6\text{-}8$$

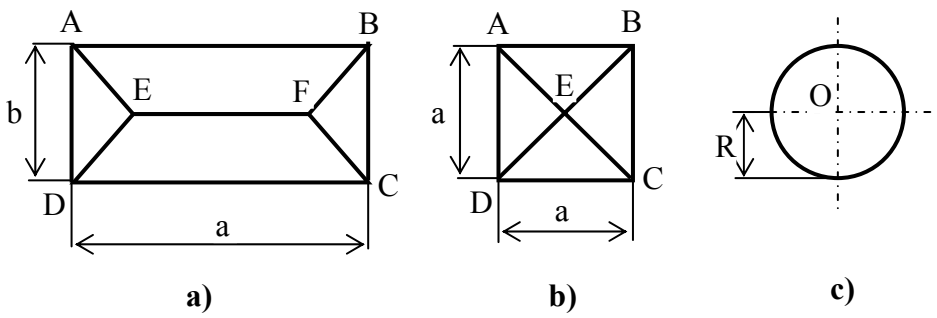


Fig.9.5.6-1

- *Cazul când a = b* (secțiune pătrată), Fig.9.5.6-1b, rezultă:

$$M_{tp} = \frac{a^3}{3} \cdot \tau_c \qquad 9.5.6\text{-}9$$

- *Secțiune circulară* (Fig.9.5.6-1c)

Suprafața $x = \Phi(z,y)$ este un con cu baza un cerc de rază R şi înălțime R. Rezultă:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot R = \frac{\pi \cdot R^3}{3} \qquad 9.5.6\text{-}10$$

iar:

$$M_{tc} = 2\tau_c \cdot V = \frac{2}{3} \cdot \pi R^3 \tau_c \qquad 9.5.6\text{-}11$$

După cum se poate constata, s-a regăsit relația 9.5.4-7.

9.6 Tubul cu perete gros supus la presiune interioară, în domeniul elasto - plastic

Se consideră un tub cu pereți groşi (Fig.9.6-1), supus la presiune interioară p_i şi una exterioară p_e cu $p_i > p_e$. Pentru $R_i < r < R$, materialul este solicitat plastic, iar pentru $R < r < R_e$, materialul este solicitat elastic. Cele două zone sunt delimitate de dimensiunea R. Tubul fiind suficient de lung, se află într-o stare plană de deformație.

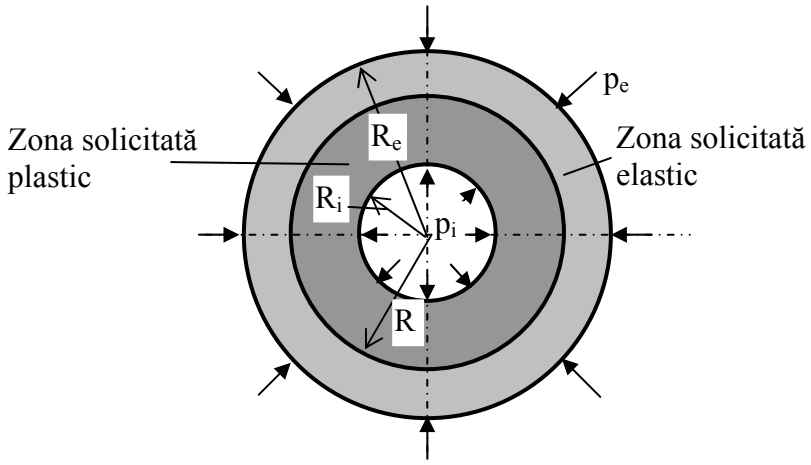


Fig.9.6-1

Între deformațiile specifice şi deplasări, există relațiile cunoscute:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad ; \quad \varepsilon_t = \frac{u}{r} \quad ; \quad \varepsilon_z = 0 \qquad 9.6\text{-}1$$

Ecuația de echilibru a unui element detaşat din peretele tubului proiectată pe direcție radială, este:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_t}{r} = 0 \qquad 9.6\text{-}2$$

Relațiile 9.6-1 şi 9.6-2, sunt valabile atât în zona elastică, cât şi în cea plastică.

În zona elastică, tensiunile normale sunt cele cunoscute:

$$\sigma_r = \frac{E_1}{1 - \nu_1^2} \cdot \left(\varepsilon_r - \nu_1 \, \varepsilon_t\right) \qquad 9.6\text{-}3a$$

$$\sigma_t = \frac{E_1}{1-\nu_1^2} \cdot \left(\varepsilon_t - \nu_1\, \varepsilon_r\right) \qquad 9.6\text{-}3b$$

$$\sigma_z = \frac{\nu\ E_1}{1-\nu_1} \cdot \left(\varepsilon_r - \varepsilon_t\right) \qquad 9.6\text{-}3c$$

unde:

$$E_1 = \frac{E}{1-\nu^2} \quad ; \quad \nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu} \qquad 9.6\text{-}4$$

Înlocuind în 9.6-3 pe ε_r şi ε_t din relația 9.6-1, rezultă:

$$\sigma_r = \frac{E_1}{1-\nu_1^2} \cdot \left(\frac{du}{dr} + \nu_1 \frac{u}{r}\right) \qquad 9.6\text{-}5a$$

$$\sigma_t = \frac{E_1}{1-\nu_1^2} \cdot \left(\frac{u}{r} + \nu_1 \frac{du}{dr}\right) \qquad 9.6\text{-}5b$$

$$\sigma_z = \frac{\nu\, E_1}{1-\nu_1} \cdot \left(\frac{du}{dr} + \frac{u}{r}\right) \qquad 9.6\text{-}5c$$

Înlocuind relațiile 9.6-5 în 9.6-2, rezultă ecuația diferențială de tip Euler:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} - \frac{1}{r^2} \cdot u = 0 \qquad 9.6\text{-}6$$

care admite soluția generală de forma:

$$u = A \cdot r + \frac{B}{r} \qquad 9.6\text{-}7$$

iar ε_r şi ε_t devin:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} = A - \frac{B}{r^2} \qquad 9.6\text{-}8a$$

$$\varepsilon_t = \frac{u}{r} = A + \frac{B}{r^2} \qquad 9.6\text{-}8b$$

unde, *A* şi *B* sunt constante de integrare. Constantele de integrare se determină punând condițiile la limită. După determinarea constantelor de integrare (a se vedea tuburile cu pereți groşi), expresiile tensiunilor normale sunt:

$$\sigma_r = \frac{p_i R_i^2 - p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} - \frac{R_i^2 R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \cdot \frac{p_i - p_e}{r^2} \qquad 9.6\text{-}9a$$

$$\sigma_t = \frac{p_i R_i^2 - p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} + \frac{R_i^2 R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \cdot \frac{p_i - p_e}{r^2} \qquad 9.6\text{-}10b$$

$$\sigma_z = 2\nu \cdot \frac{p_i R_i^2 - p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \qquad 9.6\text{-}10c$$

Utilizând criteriul de plasticitate al lui Tresca, pentru σ_r şi σ_t (σ_z se neglijează, fiind mic)

$$\sigma_t - \sigma_r = \sigma_c \qquad 9.6\text{-}11$$

relația 9.6-2, devine:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} - \frac{\sigma_c}{r} = 0 \qquad 9.6\text{-}12$$

de unde după integrare se obține:

$$\sigma_r = \sigma_c \cdot \ln r + C \qquad 9.6\text{-}13$$

Constanta de integrare *C* se determină punând condiția:

- *pentru r = R_i*, $\sigma_r = -p_i$. Deci:

$$-p_i = \sigma_c \cdot \ln r - p_i - \sigma_c \ln R_i = -\left(p_i + \sigma_c \ln \frac{R_i}{r}\right) \qquad 9.6\text{-}14a$$

şi:

$$\sigma_t = -p_i + \sigma_c \cdot \left(1 - \ln \frac{R_i}{r}\right) \qquad 9.6\text{-}14b$$

- *Pentru r = R* trebuie ca $\sigma_r = -p_i$, de unde rezultă condiția:

$$p = p_i + \sigma_c \ln \frac{R_i}{R} \qquad 9.6\text{-}15$$

Ecuația 9.6-15 are două necunoscute: *p* şi *R*. Relația suplimentară rezultă din condiția că, la limita dintre zona elastică şi cea plastică (*r* = *R*), tensiunile σ_r şi σ_t satisfac şi ele condiția de plasticitate (relația 9.6-11).

Înlocuind atunci în relația 9.6-11 pe *r* cu *R* şi apoi expresiile obținute pentru σ_t şi σ_r în relația 9.6-11, rezultă:

$$2 \cdot \frac{R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \cdot (p_i - p_e) = \sigma_c \qquad 9.6\text{-}16$$

Din relațiile 9.6-15 şi 9.6-16 se pot determina *p* şi *R*.

Astfel, eliminând pe *p*, rezultă:

$$p_i - p_e = \sigma_c \cdot \left(\ln \frac{R}{R_i} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{R_e^2} + \frac{1}{2} \right) \qquad 9.1\text{-}17$$

de unde se determină *R* (cea care stabileşte mărimea zonei plastice).

Odată determinat *R*, din relația 9.6-15 se determină presiunea la limita dintre zona elastică şi cea plastică. Având determinate *p* şi *R*, se pot determina tensiunile normale din cele două zone (relațiile 9.6-10).

Pe baza acestui caz general, se pot studia cazurile mai simple:

- *Tub supus numai la presiune interioară* ($p_e = 0$)

Se obțin ecuațiile:

$$p = p_i + \sigma_c \ln \frac{R_i}{R} \qquad 9.6\text{-}18a$$

$$p_i = \sigma_c \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{R_e^2} + \ln \frac{R}{R_i} \right) \qquad 9.6\text{-}18b$$

- *Tub supus numai la presiune exterioară* ($p_i = 0$)

În acest caz, rezultă relațiile:

$$p = \sigma_c \ln \frac{R_i}{R} \qquad 9.6\text{-}19a$$

$$-p_e = \sigma_c \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{R_e^2} + \ln \frac{R}{R_i} \right) \qquad 9.6\text{-}19b$$

Când $R = R_e$, întreaga secțiune este solicitată plastic. În acest caz, relațiile 9.6-18 şi 9.6-19, devin:

- *Tub supus numai la presiune interioară*:

$$p = p_i + \sigma_c \ln \frac{R_i}{R_e} \qquad 9.6\text{-}20a$$

$$p_i = \sigma_c \ln \frac{R_e}{R_i} \qquad 9.6\text{-}20b$$

- *Tub supus numai la presiune exterioară*:

$$p = \sigma_c \ln \frac{R_i}{R_e} \qquad 9.6\text{-}21a$$

$$-p_e = \sigma_c \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{R_e^2} + \ln \frac{R_e}{R_i} \right) \qquad 9.6\text{-}21b$$

Când $R = R_i$, întreaga secțiune este solicitată elastic. În acest caz, se regăsesc relațiile cunoscute din calculul tuburilor cu pereți groşi, în domeniul elastic.

9.7 Cedarea sistemelor alcătuite din bare drepte, solicitate la încovoiere

Studiul va fi făcut pentru solicitarea de încovoiere. Când într-un sistem static determinat, momentul încovoietor atinge valoarea M_L (relația 9.5.2-14), sistemul şi-a epuizat capacitatea de rezistență. În acest moment s-a format prima articulație plastică.

Din cauza deformațiilor foarte mari ale sistemului static determinat, epuizarea capacității de rezistență apare la o valoare $M_{ic} < M_L$. Pentru o grindă simplu rezemată (Fig.9.7-1) în starea elastică de solicitare, momentul încovoietor maxim este în dreptul sarcinii concentrate F şi are valoarea:

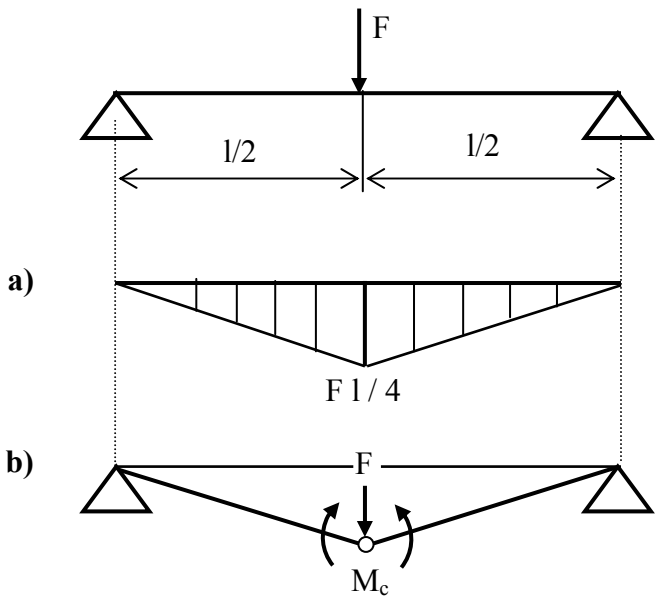


Fig.9.7-1

$$M_{i\,max} = \frac{Fl}{4}$$

Când acest moment atinge valoarea M_{ic} grinda cedează, ea transformându-se într-un mecanism. Sarcina F la care are loc cedarea, rezultă din egalitatea:

$$M_{i\,max} = M_{ic}$$

adică:

$$M_{ic} = \frac{Fl}{4} \qquad 9.7\text{-}1$$

de unde rezultă:

$$F = \frac{4M_{ic}}{l} \qquad 9.7\text{-}2$$

iar sarcina admisă este:

$$F_a = \frac{F}{c} \qquad 9.7\text{-}3$$

unde:

c - coeficient de siguranță.

Sistemele static nedeterminate, nu-şi epuizează capacitatea de rezistență în momentul în care s-a format prima articulație plastică, ci când se formează atâtea articulații plastice, încât sistemul să devină un mecanism. Astfel, pentru sistemul din Fig.9.7-2a (pentru o deschidere de margine) sunt necesare două articulații plastice, iar pentru cazul din Fig.9.7-2b (deschidere centrală), sunt necesare trei articulații plastice, pentru ca sistemul să se transforme în mecanism.

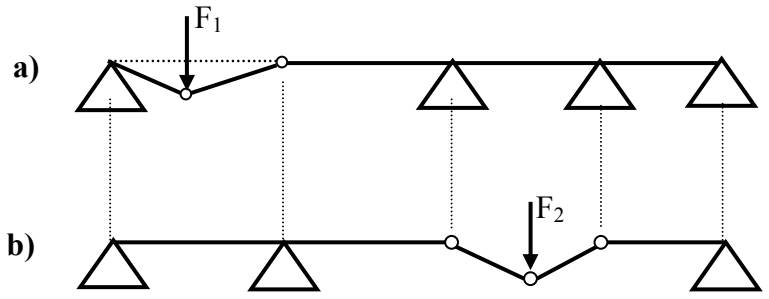


Fig.9.7-2

Să considerăm acum un sistem static nedeterminat, alcătuit dintr-o grindă continuă cu două deschideri egale, solicitată de o forță concentrată *F* (Fig.9.7-3a).

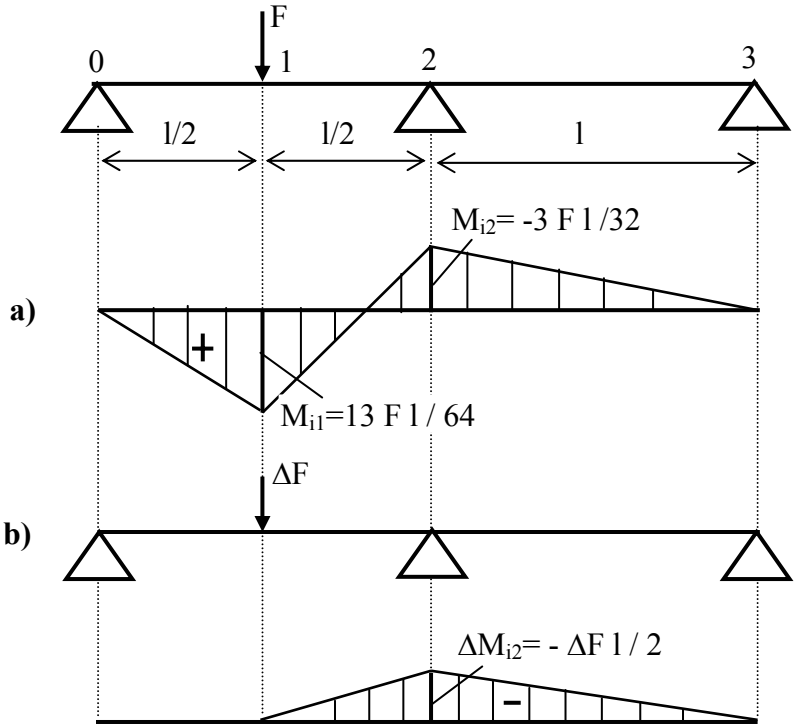


Fig.9.7-3

După ridicarea nedeterminării statice, în secțiunile *1* şi *2* acționează momentele încovoietoare:

$$M_{i1} = \frac{13Fl}{64} \quad ; \quad M_{i2} = \frac{3Fl}{32} \qquad 9.7\text{-}4$$

cu

$$M_{i1} > |M_{i2}|$$

Rezultă de aici, că prima articulație plastică se va forma în secțiunea *1*. Forța *F* care produce această articulație plastică se determină din relația cunoscută:

$$M_{i1} = M_{ic} \qquad 9.7\text{-}5$$

Deci:

$$M_{ic} = \frac{13Fl}{64} \qquad 9.7\text{-}6$$

de unde:

$$F = \frac{64M_{ic}}{13 \cdot l} \qquad 9.7\text{-}7$$

La această valoare a sarcinii *F*, momentul încovoietor din secțiunea *2* este:

$$M_{i2} = -\frac{3 \cdot l}{32} \cdot \frac{64M_{ic}}{13 \cdot l} = -\frac{6}{13} \cdot M_{ic} \qquad 9.7\text{-}8$$

Considerând că forța *F* creşte cu *ΔF* şi ținând seama că secțiunea *1* şi-a epuizat capacitatea de rezistență, sistemul static nedeterminat sub acțiunea sarcinii suplimentare *ΔF* nu se va comporta ca o grindă continuă, ci ca o grindă cu o articulație plastică în dreptul secțiunii *1*. Diagrama de momente pe noul sistem, este prezentată în Fig.9.7-2b. În acest caz, în secțiunea *2*, apare evident un moment încovoietor suplimentar:

$$\Delta M_{i2} = -\frac{\Delta F \cdot l}{2} \qquad 9.7\text{-}9$$

Situația aceasta se menține până când în secțiunea *2* va apare o articulație plastică, adică până când M_{i2} (relația 9.7-8) împreună cu ΔM_{i2} (relația 9.7-9) egalează în valoare absolută pe M_{ic}, adică:

$$\left|M_{i2}\right| + \left|\Delta M_{i2}\right| = M_{ic} \qquad 9.7\text{-}10a$$

sau:

$$\frac{6}{13} \cdot M_{ic} + \frac{\Delta F \cdot l}{2} = M_{ic} \qquad 9.7\text{-}10b$$

Din relația 9.7-10b, rezultă:

$$\Delta F = \frac{14}{13 \cdot l} \cdot M_{ic} \qquad 9.7\text{-}11$$

Se poate determina acum sarcina care solicită sistemul:

$$F_r = F + \Delta F = \frac{64}{13 \cdot l} \cdot M_{ic} + \frac{14}{13 \cdot l} \cdot M_{ic} = 6 \cdot \frac{M_{ic}}{l} \qquad 9.7\text{-}12$$

Pe baza forței F_r (relația 9.7-12) se determină forța capabilă (admisă) pentru sistemul static nedeterminat:

$$F_a = \frac{F_r}{c} \qquad 9.7\text{-}13$$

unde:

c - coeficient de siguranță.

B I B L I O G R A F I E

1. BABEU T: Rezistența Materilelor, Lito. I.P. “T. V.” Timişoara, 1980
2. BELEAEV N. M: Rezistența Materialelor Vol. I-II, Ed. Tehnică, Bucureşti. 1956
3. BIA C, ILLE V, SOARE M,V: Rezistența Materialelor şi Teoria Elasticității, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983
4. BUZDUGAN G: Rezistența Materialelor, Ed. Academiei R.S.R., Bucureşti, 1986
5. DEUTSCH I: Rezistența Materialelor, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1979
6. DEUTSCH I, GOIA I, CURTU I, NEAMȚU T, SPERCHEZ F: Probleme de Rezistența Materialelor, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti, 1983
7. DOBRE I: Curs de Rezistența Materialelor, Vol. 2, Lito I. P. “T. V”. Timişoara, 1980
8. DUMITRU I, NEGUȚ N: Curs de Rezistența Materialelor, Lito I.P. “T.V.” Timişoara, 1984
9. HAJDU I: Rezistența Materialelor, Lito I.P. “T.V.”, Timişoara, 1983
10. MOCANU D.R: Rezistența Materialelor, Ed. Tehnică, Bucureşti, 1980
11. TRIPA P: Etape şi modele de rezolvare a problemelor de rezistența materialelor, Vol. I, Ed. MIRTON, Timişoara, 1998
12. TRIPA P: Etape şi modele de rezolvare a problemelor de rezistența materialelor, Vol II, Ed. MIRTON, Timişoara, 1999
13. TRIPA P: Rezistența Materialelor, Vol. I, Editura MIRTON, Timişoara, 1999
14. VOINEA R, VOICULESCU D, SIMION F.P: Introducere în mecanica solidului cu aplicații în inginerie, Ed. Academiei R.S.R., Bucureşti, 1989.